

# المنطق الرياضى

تأليف

دكتور / رأفت رياض رزق الله




MATHEMATICAL LOGIC






المكتبة الأكاديمية

# المنطق الرياضى

# MATHEMATICAL LOGIC


**تأليف**

**دكتور / رأفت رياض رزق الله**

أستاذ مساعد بقسم الرياضيات

كلية التربية - جامعة عين شمس






**الناشر**

**المكتبة الأكاديمية**

شركة مساهمة مصرية

٢٠٠١

# إهـــداء

**إلى أولادى وزوجتى، شركائى فى غربـتى.**

# المقدمـــة

يعرف المنطق، فى كثير من الأحيان، على انه علم التفكـــير الدقيـــق للوصــول إلى استنتاجات مضبوطة من وقائع أو مقدمات. ولم يكن ينظر للمنطق على انه جـــزء مـــن الرياضيـــات ولكن مع بداية القرن العشـــرين اصبـــح المنطـــق جـــزء مـــن دراســـة الرياضيـــات بل واصبح علم من علوم الرياضيـــات ويرجـــع الفضل فى هذا إلى العـــالم الإنجليزى جورج بورل ( 1864 – 1815 ) George Boole الـــذى اســـتطاع فى كتابــه "قواعد التفكير – Laws of thought" أن يطور المنطق ليصبح نظام ريـــاضى مجرد واستخدمه كنوع خاص من الجبر أطلق عليه فيما بعد اسم الجبر البـــوولى Boolean Algebra نسبة إلى جورج بورل، ولقد اصبح الجبر البوولى أساسى فى تصميـــم الدوائـــر المنطقية فى الكومبيوتر. وعلم المنطق هو علم التفكير الدقيق والصحيح ولا غنى عنه عنـــد دراسة فروع العلوم المختلفة فهو يبين كيف تفكر تفكيرا صحيحا وتستخلص النتائج مـــن المعطيات وكيف تؤيد وجهة نظرك بالبرهان الصحيح، وفى كثير مـــن الأحيـــان توضـــع افتراضات خاطئة عن أشياء أو أشخاص بسبب عدم فهم بعض العبـــارات، فالقـــارئ أو المستمع يفهم أشياء ما تختلف عن ما يقصده الكاتب فيما يكتبه أو المتحدث فيمـــا يقولـــه وذلك ربما يرجع إلى عدم الدقة فى التعبير وليس معناه قصورا فى اللغـــة المســـتخدمة فى التعبير. وكثير من القضايا التى نتعامل معها فى حياتنا تكون بحاجة إلى إثبات وبدون تقـــديم الإثبات تبقى مثل هذه القضايا مجرد ادعاءات معلقة إلى أن يتم إثبات صحتـــها أو إثبـــات عدم صحتها، ومن الأهداف الأساسية للمنطق هو الاهتمام بإثبات صحة القضايا وكذلـــك الاهتمام بوضع الإثبات فى خطوات منظمة دون غموض أو إبهام، فأحيانا نتعامل مع قضيـــة صحيحة ولكن الإثبات الذى وضع لها مبهم ولا يفى بالغرض. وفهم المنطق واســـتخدامه سوف يساعدنا على تفادى مثل هذه الأخطاء وسوف يزيد من مهاراتنا فى التفكير، حتى انه

اصبح من يفكر بصورة منظمة ودقيقة يوصف بأنه يفكر بطريقة منطقية، لذلك ينبغى دائما أن ندقق فى العبارات المستخدمة بحيث نعبر بصدق عما نقصده وهناك قول مأثور يقول:

"قل ما تعنيه واعنى ما تقوله"

**"Say what you mean and mean what you say"**

ولما كان الإبهام والغموض فى المعنى غير مرغوب فيه وبخاصة فى الرياضيات، فلم يترك الأمر للاجتهاد فى المنطق الرياضى، فعلم المنطق يرتكز على مبادئ وقواعد واضحة متفق عليها عالميا، وله رموز وأدوات خاصة به لربط الجمل معا لتعطى معان محددة تماما لا تقبل اللبس أو الغموض وهذا يدفعنا ألى القول بأن المنطق الرياضى لغة علمية متفق عليها بين الرياضيين ولا غنى عنها فى الرياضيات أو فى فروع العلوم المختلفة. و هذا الكتاب الذى بين يديك الآن يحمل اسم "المنطق الرياضى" وقد تم تخطيطه بحيث يقدم المنطق الرياضى بصورة مبسطة، لكن شاملة ومدعمة بالأمثلة المختلفة من حياتنا اليومية بالإضافة إلى أمثلة عديدة تتعلق بالمفاهيم الرياضية المختلفة. وقد قسمت المادة العلمية لهذا الكتاب إلى ثمانية فصول كتبت بطريقة متسلسلة تبرز الترابط بين كل فصل والفصل الذى يليه. وكل فصل يبدأ بسرد واضح ومفصل للتعريفات والأساسيات مع أمثلة توضيحية متعددة وفى نهاية كل فصل وضعت تمارين تعتبر بمثابة مراجعة شاملة للمادة العلمية بالفصل. وقد ذيلنا هذا الكتاب بملحقين أ ، ب لتقديم مراجعة سريعة للمفاهيم الأساسية فى المجموعات.

وأود أن انتهز هذه الفرصة لأتوجه بالشكر العميق إلى كل أساتذتى الذين تعلمت على أياديهم فى مراحل تعليمى المختلفة.

وأتمنى أن يكون فى هذا الكتاب النفع لجميع الدارسين ... والله من وراء القصد . . وهو يهدى السبيل.

المؤلف

دكتور / رأفت رياض رزق الله

أستاذ مساعد بقسم الرياضيات

كلية التربية – جامعة عين شمس

# المحتويات

الصفحة

الفصل



# التقارير والعمليات المنطقية

# Statements and Logic Operations

## ١- التقارير (العبارات) Statements

نعلم أن الجمل فى اللغة العربية تختلف فى أنواعها فمنها الجمل الفعلية والجمل الاسمية و الجمل التعجبية والجمل الاستفهامية أو الطلبية... الخ. وفى المنطق الرياضى يتم تقسيم الجمل إلى قسمين هما:

- جمل خبرية : وهى الجمل التى تحمل إلينا خبرا ما.
- جمل غير خبرية : وهى الجمل التى لا تحمل إلينا أى خبر.

مثال ١ : فى الجدول الآتى نوضح أمثلة مختلفة من الجمل الخبرية والجمل الغير خبرية

| الجملة | نوع الجملة |
|---|---|
| الصيف فصل من فصول السنة . | جملة خبرية |
| ما هو اسمك ؟ | جملة غير خبرية ( جملة استفهام ) |
| القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية . | جملة خبرية |
| التدخين ضار جدا بالصحة العامة . | جملة خبرية |
| ما اجمل فصل الربيع ! | جملة غير خبرية ( جملة تعجب ) |
| يا احمد كن حريصا على الاستيقاظ مبكرا . | جملة غير خبرية ( جملة نداء ) |
| المنطق علم من علوم الرياضيات . | جملة خبرية |
| هل المثلث المتساوى الأضلاع متساوى الزوايا ؟ | جملة غير خبرية ( جملة استفهام ) |
| مجموع زوايا المثلث تساوى 180 درجة . | جملة خبرية |
| لا تقسم على الصفر . | جملة غير خبرية ( جملة طلبية ) |

**تعريف ١ : التقرير Statement**

التقرير هو جملة خبريـــة ذات معنى تحمل خبرا ويمكن الحكم بأنها إما صائبة وإما خاطئـــة ولا تكون صائبة وخاطئة فى آن واحد.

أى انه يمكننا القول أن الجملة الخبرية تكون تقرير إذا اقترنت بالناتج صواب أو خطأ.

**تعريف ٢ : التقارير الصائبة والتقارير الخاطئة**

إذا كان التقرير يحمل خبرا صادقا فإنه يسمى تقريرا صائبا وإذا كان التقرير يحمل خـــبرا كاذبا فإنه يسمى تقريرا خاطئا.

**تعريف ٣ : قيم الحقيقة ( الصواب ) Truth Values**

الكلمات "صواب" و "خطأ" تسمى بقيم الحقيقة للتقرير وإذا كـــان التقريـــر صـــائب (True) فإننا نقول أن قيمة الحقيقة للتقرير هى صواب ونرمز لذلك بالرمز T وإذا كان التقرير خاطئ(False) فإننا نقول أن قيمة الحقيقة للتقرير هى خطـــأ ونرمـــز لذلـــك بالرمز F.

مثال ٢ : فى الجدول الآتى نوضح قيم الحقيقة لبعض التقارير

| التقرير | قيمة الحقيقة للتقرير |
|---|---|
| الصيف فصل من فصول السنة . | صواب T |
| القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية . | صواب T |
| التدخين ضار جدا بالصحة العامة . | صواب T |
| مجموع زوايا المثلث تساوى 150 درجة . | خطـأ F |
| $2+5=6$ | خطـأ F |
| المثلث المتساوى الأضلاع متساوى الزوايا . | صواب T |
| العدد 4 اكبر من العدد 5 ( $4 > 5$ ) . | خطـأ F |

**تعريف ٤ : التقرير البسيط Simple Statement**

التقرير الذى يحمل خبرا واحدا يسمى تقريرا بسيطا.

**تعريف ٥ : التقرير المركب Compound Statement**

التقرير الذى يحمل اكثر من خبرا يسمى تقريرا مركبا.

أى إن التقرير المركب يتكون من تقريرين بسيطين أو اكثر ويربط بين كل منها أداة من أدوات الربط. وسوف نرمز للتقارير البسيطة بالحروف الصغيرة

$$p\ ,\ q\ ,\ r\ ,\ s\ ,\ t\ ,\ \ldots$$

والتقرير المركب الذى يتكون من هذه التقارير البسيطة يسـمى افـتراض **Proposition** وسوف نستخدم الحروف الكبيرة

$$A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ldots$$

للدلالة على التقارير المركبة.

وعند تكوين تقرير مركب فانه لا يهم وجود أى نوع من العلاقة سواء فى المعنى أو المحتوى بـين التقارير البسيطة التى تدخل فى تكوين التقرير المركب، فمثلا التقرير

"الشمس ساطعة أو 8 = 5 + 3 "

يمثل تقرير مركب وهو يتكون من تقريرين بسيطين هما

p : الشمس ساطعة

q : 3 + 5 = 8

وكما نلاحظ فإنه لا يوجد أى نوع من العلاقة سواء فى المعنى أو المحتوى بين التقريرين .

مثال ٣: فى الجدول الآتى نوضح أمثلة مختلفة من التقارير البسيطة والتقارير المركبة

| التقـــــرير | نوع التقرير |
|---|---|
| الصيف فصل من فصول السنة. | تقرير بسيط |
| القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية. | تقرير بسيط |
| السماء تمطر و الشمس مشرقة. | تقرير مركب |
| السماء تمطر أو الشمس مشرقة. | تقرير مركب |
| العدد 5 عدد فردى. | تقرير بسيط |
| مجموع زوايا المثلث تساوى180 درجة. | تقرير بسيط |
| قل ما تعنيه وأعنى ما تقوله. | تقرير مركب |
| إذا كان $x = 5$ فإن $x + 3 = 8$ | تقرير مركب |
| إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين. | تقرير مركب |
| الشمس مشرقة. | تقرير بسيط |
| إذا سقطت الأمطار فإن الخير قادم. | تقرير مركب |
| التدخين ضار جدا بالصحة العامة. | تقرير بسيط |
| المنطق علم من علوم الرياضيات. | تقرير بسيط |
| ريمون طالب بكلية الطب أو كلية الصيدلة. | تقرير مركب |
| احمد يدرس الرياضيات والتاريخ. | تقرير مركب |
| إذا كان الجو بارد فإن السماء تمطر. | تقرير مركب |
| العدد 4 اكبر من العدد 5. | تقرير بسيط |
| الجو بارد وإذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة. | تقرير مركب |
| إذا كان $x > y$ و $y > z$ فإن $x > z$. | تقرير مركب |
| المثلث متساوى الأضلاع إذا كان متساوى الزوايا. | تقرير مركب |

مثال ٤ : فى الجدول الآتى نوضح أمثلة مختلفة من التقارير المركبة ونعرض التقارير البسيطة المكونة لكل منها:

| التقرير المركب | التقارير البسيطة التى تدخل فى تكوين التقرير المركب |
|---|---|
| الشمس مشرقة و السماء تمطر . | p : الشمس مشرقة<br>q : السماء تمطر |
| احمد يدرس الرياضيات و التاريخ . | p : احمد يدرس الرياضيات<br>q : احمد يدرس التاريخ |
| إذا كان الجو بارد فإن السماء تمطر . | p : الجو بارد<br>q : السماء تمطر |
| الجو بارد وإذا كانت السماء تمطر فإن الشمس تكون مشرقة . | p : الجو بارد<br>q : السماء تمطر<br>r : الشمس مشرقة |
| إذا كان $x = 5$ فإن $x + 3 = 8$ . | p : $x = 5$<br>q : $x + 3 = 8$ |
| إذا كان $x > y$ و $y > z$ فإن $x > z$ . | p : $x > y$<br>q : $y > z$<br>r : $x > z$ |
| الشكل الرباعي يكون مربع إذا كانت زواياه قوائم وأضلاعه متساوية . | p : الشكل الرباعى يكون مربع<br>q : الشكل الرباعى زواياه قوائم<br>r : الشكل الرباعى أضلاعه متساوية |
| المثلث abc متساوى الأضلاع إذا كان متساوى الزوايا . | p : المثلث abc متساوى الأضلاع<br>q : المثلث abc متساوى الزوايا |

## ٢ – أدوات الربط Connectives

أدوات الربط بين التقارير البسيطة تسمى بالعمليات المنطقية وهى

أداة الوصل ( العطف " و " )

أداة الفصل ( التخير " أو " )

أداة الربط الشرطية " إذا كان ... فإن ... "

أداة الربط الشرطية المزدوجة " ... إذا وفقط إذا كان ... "

وهذه الأدوات كل منها يربط بين تقريرين بسيطين، وكلمة النفى " لا " التى تستخدم لنفى التقرير البسيط ينظر أليها أيضا كأداة ربط بالرغم من أنها لا تربط بين تقريرين بسيطين وإنما تنفى تقرير بسيط، ويمكن نفى التقرير p بعدة صور كالآتى:

لا p

ليس p

ليس صحيحا أن p

من الخطأ القول أن p

فمثلا

| التقرير البسيط | صياغات مختلفة لنفى التقرير البسيط وكل منها يعتبر تقرير مركب |
|---|---|
| السماء تمطر اليوم. | السماء لا تمطر اليوم.<br>ليس صحيحا أن السماء تمطر اليوم.<br>من الخطأ القول أن السماء تمطر اليوم. |

لذلك سوف نعامل التقرير البسيط المنفى على انه تقرير مركب ويسمى تقرير منفى وبالتالى يمكن تعريف التقرير المركب على انه يتكون من ربط تقرير بسيط أو اكثر بأداة من أدوات

الربط، ومن الخواص الأساسية للتقرير المركب هى أن قيمة الحقيقة الخاصة به تحدد تبعـــا لمـــا يأتى:

- قيمة الحقيقة لكل تقرير بسيط فى التقرير المركب .
- أداة الربط المستخدمة فى ربط التقارير البسيطة لصنع التقرير المركب .

**الوصـــلة**

عند ربط تقريرين بسيطين باستخدام أداة الوصل " و "
فإن التقرير المركب الناتج يسمى وصلة **conjunction**.

فمثلا التقرير

"اليوم هو الأحد وغدا يوم الأربعاء"

من نوع الوصلة لان أداة الربط المستخدمة هى أداة الوصل " و " ويجب أن نتذكر دائما أننـــا لا نبحث فى معنى التقرير ولكننا نبحث ونركز اهتمامنا على نوع التقرير، أى على نـــوع أداة الربط المستخدمة فمثلا التقرير

" الحيوانات أعداد و الأسماك تمطر "

ليس له معنى ولكنه من نوع الوصلة لان أداة الربط المستخدمة هى أداة الوصل " و " وهـــذا ما نبحث عنه، وأحيانا فى بعض التقارير يمكن استخدام كلمة "لكن **but** " كأداة وصل بـــدلا من أداة الوصل "و **and** " فمثلا التقرير

"السماء تمطر و الشمس مشرقة"

من نوع الوصلة ويمكن كتابته بالصورة

" السماء تمطر لكن الشمس مشرقة "

**الفاصلة**

عند ربط تقريرين بسيطين باستخدام أداة الفصل " أو "
فإن التقرير المركب الناتج يسمى فاصلة **disjunction** .

فمثلا التقارير

" السماء تمطر أو الشمس مشرقة "

" إما السماء تمطر أو الشمس مشرقة "

" احمد يدرس الرياضيات أو التاريخ "

" ريمون طالب بكلية الطب أو كلية الصيدلة "

" إما ريمون طالب بكلية الطب أو كلية الصيدلة "

كل من هذه التقارير من نوع الفاصلة لأن أداة الربط المستخدمة هى أداة الفصل "أو ".

## الشرطية

**التقرير المركب الناتج من ربط تقريرين بسيطين باستخدام أداة الربط "إذا كان ... فإن ... " يسمى شرطية conditional.**

وجزء التقرير المحصور بين " إذا كان ... فإن " يسمى المقدمة **antecedent** بينما جزء التقرير الذى يتبع " فإن " يسمى النتيجة **consequent**

فمثلا التقرير

" إذا كان الجو بارد فإن السماء تمطر"

من نوع الشرطية وجزء المقدمة هو " الجو بارد " وجزء النتيجة هو "السماء تمطر".

والآن نناقش التقرير الآتى والذى سبق دراسته فى الهندسة

" إذا تساوى ضلعان فى مثلث فإنه تتساوى زاويتان فى المثلث،

وإذا تساوت زاويتان فى مثلث فانه يتساوى ضلعان فى المثلث "

نلاحظ أن هذا التقرير من نوع الوصلة وهو يربط بين تقريرين من نوع الشرطية ويمكن كتابته بالصورة الآتية:

"يتساوى ضلعان فى مثلث إذا وفقط إذا تساوت زاويتان فى المثلث"

وهذا النوع من التقارير والذى نستخدم فيه أداة الربط " ... إذا وفقط إذا ... " يسمى شرطية مزدوجة **biconditional**.

## الشرطية المزدوجة

التقرير المركب الناتج من ربط تقريرين بسيطين باستخدام أداة الربط "... إذا وفقط إذا ... " يسمى شرطية مزدوجة **biconditional**.

والآن وبعد أن تعرفنا على أنواع التقارير وأدوات الربط فإنه لأى تقرير معطى ينبغى علينا أن نكون قادرين على تحديد ما إذا كان التقرير بسيط أو مركب، وفى حالة إذا كان التقرير مركب نتعرف على نوعه فيما إذا كان نفى – وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة.

مثال ٥ : فى الجدول الآتى نضع تصنيف للتقارير المعطاة من حيث نوع الربط

( نفى – وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة )

| التقرير | نوع التقرير من حيث نوع الربط |
|---|---|
| سوف احصل على تقدير ممتاز فى مادة الرياضيات أو ساكون حزين . | فاصلة |
| حضر احمد مبكرا لكن حسين حضر متأخرا . | وصلة |
| الشمس اليوم غير مشرقة . | نفى |
| الشمس اليوم غير مشرقة لكن الجو معتدل . | وصلة |
| ليس صحيحا أن الشمس اليوم غير مشرقة و الجو معتدل . | نفى |
| إذا اجتهد الطالب فإنه ينجح . | شرطية |
| المثلث abc متساوى الأضلاع إذا وفقط إذا كان متساوى الزوايا . | شرطية مزدوجة |

والجدول الآتى يشتمل على أدوات الربط والرموز التى تستخدم لربط التقارير البسيطة لصنع التقارير المركبة

| اسم أداة الربط | أداة الربط Connective | رمز أداة الربط Symbol |
| --- | --- | --- |
| أداة النفى Negation | ليس not | $\sim$ |
| أداة الوصل (العطف) Conjunction | و and | $\wedge$ |
| أداة الفصل ( التخير ) Disjunction | أو or | $\vee$ |
| أداة الربط الشرطية Conditional | إذا كان ... فإن ... if ... then ... | $\ldots \rightarrow \ldots$ |
| أداة الربط الشرطية المزدوجة Biconditional | ... إذا وفقط إذا كان ... ... iff ... | $\ldots \leftrightarrow \ldots$ |

مثال ٦ : نفرض التقارير البسيطة

p : الجو بارد

q : السماء تمطر

r : الشمس مشرقة

صنف التقارير المركبة الآتية من حيث نوع الربط

( نفى - وصلة - فاصلة - شرطية - شرطية مزدوجة )

ثم اعد صياغتها من صورة جمل إنشائية إلى صورة رموز .

| | |
|---|---|
| ١ – الجو ليس بارد . | ٨ – إذا كان الجو ليس بارد فإن الشمس تكون مشرقة . |
| ٢ – الجو بارد و السماء تمطر . | ٩ – الجو بارد إذا وفقط إذا كان السماء تمطر. |
| ٣ – الجو ليس بارد و السماء لا تمطر . | ١٠– إذا كان الجو ليس بارد أو الشمس مشرقة فإن السماء لا تمطر . |
| ٤ – السماء تمطر أو الشمس مشرقة. | ١١– الشمس ليست مشرقة إذا وفقط إذا كان الجو بارد والسماء تمطر . |
| ٥ – ليس من الحقيقى أن السماء لا تمطر. | ١٢– الشمس ليست مشرقة لكن إذا كان الجو بارد فإن السماء سوف تمطر . |
| ٦ – من الخطاء القول أن الشمس مشرقة والسماء تمطر. | ١٣ – من الخطاء القول أن الجو بارد أو الشمس مشرقة. |
| ٧ – إذا كان الجو بارد فإن السماء تمطر. | ١٤– الشمس ليست مشرقة ومن الخطاء القول أن الجو ليس بارد أو السماء لا تمطر. |

الحل : فى الجدول الآتى نضع تصنيف التقارير من حيث نوع الربط ونعيد صياغتها من صورة جمل إنشائية إلى صورة رموز

| التقرير المركب فى صورة جملة إنشائية | نوع الربط | التقرير المركب فى صورة رموز |
|---|---|---|
| ١ – الجو ليس بارد . | نفى | $\sim p$ |
| ٢ – الجو بارد و السماء تمطر . | وصلة | $p \wedge q$ |
| ٣ – الجو ليس بارد و السماء لا تمطر . | وصلة | $\sim p \wedge \sim q$ |
| ٤ – السماء تمطر أو الشمس مشرقة . | فاصلة | $q \vee r$ |
| ٥ – ليس من الحقيقى أن السماء لا تمطر . | نفى | $\sim (\sim q)$ |

| | | |
|---|---|---|
| ٦ - من الخطاء القول أن الشمس مشرقة والسماء تمطر. | نفى | $\sim ( r \wedge q )$ |
| ٧ - إذا كان الجو بارد فإن السماء تمطر . | شرطية | $p \rightarrow q$ |
| ٨ - إذا كان الجو ليس بارد فإن الشمس تكون مشرقة . | شرطية | $\sim p \rightarrow r$ |
| ٩ - الجو بارد إذا وفقط إذا كان السماء تمطر . | شرطية مزدوجة | $p \leftrightarrow q$ |
| ١٠ - إذا كان الجو ليس بارد أو الشمس مشرقة فإن السماء لا تمطر . | شرطية | $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$ |
| ١١ - الشمس ليست مشرقة إذا وفقط إذا كان الجو بارد والسماء تمطر . | شرطية مزدوجة | $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$ |
| ١٢ - الشمس ليست مشرقة لكن إذا كان الجو بارد فإن السماء سوف تمطر . | وصلة | $\sim r \wedge ( p \rightarrow q )$ |
| ١٣ - من الخطاء القول أن الجو بارد أو الشمس مشرقة . | نفى | $\sim (p \vee q )$ |
| ١٤ - الشمس ليست مشرقة ومن الخطاء القول أن الجو ليس بارد أو السماء لا تمطر . | وصلة | $\sim r \wedge \sim ( \sim p \vee \sim q )$ |

من المثال السابق دعنا نناقش التقارير الآتية :

| التقرير المركب فى صورة جملة إنشائية | نوع الربط | التقرير المركب فى صورة رموز |
|---|---|---|
| إذا كان الجو بارد و السماء لا تمطر فـــإن الشمس تكون مشرقة . | شرطية | $p \wedge \sim q \rightarrow r$ |
| الجو بارد وإذا كانت السماء لا تمطر فـــإن الشمس تكون مشرقة . | وصلة | $p \wedge ( \sim q \rightarrow r )$ |
| الجو بارد و من الخطاء القول انه إذا كانت السماء تمطر فإن الشمس تكون مشرقة. | وصلة | $p \wedge \sim ( q \rightarrow r )$ |

نلاحظ أن التقارير الثلاث مختلفة تماما فى المعنى نتيجة لوجود الأقواس ومن هنا تـــأتى أهمية استخدام الأقواس فى موضعها الصحيح عند كتابة التقارير المركبة حتى تعطينا المعنى المطلـــوب عند تحويلها من الصورة الرمزية إلى صورة جمل إنشائية أو العكس.

مثال ٧ : للتقرير المركب الآتى :

" نهر النيل هو شريان الحياة فى مصر وإذا امتدت مياه النيل الى الصحراء فسوف يتم تعميرها ويجد الشباب فرص عمل جديدة."

اكتب التقارير البسيطة المكونة لهذا التقرير المركب ثم اعد صياغته من صورة جملة إنشائية إلى رموز ووضح نوع التقرير من حيث نوع الربط ( نفى – وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة ).

الحل : التقارير البسيطة المكونة للتقرير المركب هى :

$p$ : نهر النيل هو شريان الحياة فى مصر

$q$ : مياه النيل تمتد الى الصحراء

$r$ : الصحراء يتم تعميرها

$s$ : الشباب يجد فرص عمل جديدة

أذن يمكن صياغة التقرير فى صورة رموز كالآتى : $p \wedge (q \rightarrow (r \wedge s))$

والتقرير من نوع الوصلة.

## ٣ – الهيمنة فى أدوات الربط Dominance of Connectives

تعرفنا فى البند السابق على بعض التقارير المركبة التى تحتوى على اكثر من أداة ربـــط والآن دعنا نناقش التقرير المركب A الآتى :

A : " سوف اذهب الى الحديقة أو سوف اذهب الى النادى ، وسوف أذهب الى المسرح "

نفرض التقارير البسيطة

$p$ : سوف اذهب الى الحديقة

$q$ : سوف اذهب الى النادى

$r$ : سوف أذهب الى المسرح

أذن التقرير المركب A فى صورة رمزية يكون $(p \vee q) \wedge r$ أى إن التقرير A من نوع الوصلة وهذا واضح من علامة الترقيم " ، " الموجودة فى الجملة الإنشائية . أمـــا إذا كتبنا التقرير المركب A كالآتى :

A : "سوف اذهب الى الحديقة، أو سوف اذهب الى النادى وسوف أذهب الى المسرح"

أذن فى هذه الحالة التقرير المركب A فى صورة رمزية يكون $p \vee (q \wedge r)$ ، أى إن التقرير A فى هذه الحالة يكون من نوع الفاصلة وهذا الاختلاف ناتج من تغيير وضع علامـــة الترقيم " ، " عند كتابة التقرير فى صورة إنشائية والذى أدى بدوره الى تغيير وضع الأقـــواس .
أما إذا كتبنا التقرير المركب A بدون استخدام علامة الترقيم كالآتى :

A : "سوف اذهب الى الحديقة أو سوف اذهب الى النادى وسوف أذهب الى المسرح"

أذن فى هذه الحالة التقرير المركب A فى صورة رمزية يكـــون $p \vee q \wedge r$ وفى هـــذه الحالة لا نستطيع الحكم على التقرير المركب A هل من نوع الوصلة أو الفاصلـــة وبالتـــالى يحدث التباس فى فهم المعنى المقصود، ومن هذا نجد أننا نحتاج الى علامات الترقيم عند كتابـــة التقارير المركبة حتى نحصل على المعنى المطلوب، وفى علم المنطق فإن أهمية استخدام الأقـــواس تعادل أهمية علامات الترقيم، وإذا أردنا ترجمة تقرير من الصورة الرمزية الى صورة جملة إنشائية فإننا ننظر الى الأقواس الموجودة بالتقرير لأنه بواسطة هذه الأقواس نستطيع أن نتعرف علـــى نوع التقرير فيما إذا كان ( نفى - وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة ) أما إذا كـــان التقرير لا يحتوى على أقواس فإننا نتعرف على نوع التقرير عن طريق معرفتنا لقـــوة هيمنـــة أدوات الربط.

وفيما يأتى نعرض أدوات الربط مرتبة وفقا للهيمنة:

١ – أداة الشرطية المزدوجة $\leftrightarrow$

٢ – أداة الشرطية $\rightarrow$

٣ – أداة الوصل $\wedge$ وأداة الفصل $\vee$

٤ – أداة النفى $\sim$

ونلاحظ أن أداة الشرطية المزدوجة $\leftrightarrow$ هى اقوى أداة ربط وهـى المهيمنـة ويتبعـها أداة الشرطية $\rightarrow$ يليها أداة الوصل $\wedge$ والفصل $\vee$ وهم نفس الدرجة من الهيمنـة وفى النهاية يأتى أداة النفى $\sim$ ، وإذا كان التقرير المركب يحتـوى علـى أدوات الوصـل $\wedge$ والفصل $\vee$ فقط دون غيرها فإنه لابد من استخدام الأقواس لتمييز ما إذا كان التقرير مـن نوع الوصلة أو الفاصلة ، فمثلا التقرير $(p \vee q) \wedge r$ من نـوع الوصلـة بينمـا التقرير $p \vee (q \wedge r)$ من نوع الفاصلة، وأيضا أداة الربط خارج الأقواس يكون لهـا الهيمنة على ما بداخل الأقواس من أدوات للربط ، فمثلا التقرير $\sim(p \rightarrow q)$ مـن نـوع النفى لان أداة النفى واقعة خارج القوس ولذلك فهى المهيمنة على ما بداخل القوس، وكمثـال آخر ، التقرير $p \leftrightarrow (q \wedge r)$ من نوع الشرطية المزدوجـة وعنـد كتابتـه بـالصورة $p \leftrightarrow q \wedge r$ يظل أيضا من نوع الشرطية المزدوجة لان الأقواس فى هذه الحالة ليس لهـا ضرورة فأداة الشرطية المزدوجة هى الأقوى ولها الهيمنة بينما إذا كتبنا التقريـر بـالصورة $(p \leftrightarrow q) \wedge r$ فإنه يصبح من نوع الواصلة بسبب وجود القوس.

مثال ٨ : حدد نوع كل من التقارير الآتية وفقا لقاعدة الهيمنة من حيث نوع الربط
( نفى – وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة )

(1) - $p \wedge (q \vee r)$

(2) - $(p \wedge q) \vee r$

(7) - $(\sim p \vee q \rightarrow r) \wedge s$

(8) - $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow s \vee t$

(3) - $\sim(p \wedge q)$

(4) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$

(5) - $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$

(6) - $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim s$

(9) - $\sim(p \vee q \leftrightarrow r) \wedge s \rightarrow t$

(10) - $\sim p \vee q \leftrightarrow r \wedge s \rightarrow t$

(11) - $\sim p \vee (q \leftrightarrow r \wedge s) \rightarrow t$

(12) - $\sim p \vee (q \leftrightarrow r \wedge s \rightarrow t)$

الحل :

| التقرير | نوع التقرير | السبب |
|---|---|---|
| $p \wedge (q \vee r)$ | وصلة | وجود القوس |
| $(p \wedge q) \vee r$ | فاصلة | وجود القوس |
| $\sim(p \wedge q)$ | نفي | وجود أداة النفي ~ خارج القوس |
| $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$ | شرطية | أداة الشرطية → لها الهيمنة |
| $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$ | شرطية | أداة الشرطية → لها الهيمنة |
| $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim s$ | شرطية مزدوجة | أداة الشرطية المزدوجة ↔ لها الهيمنة |
| $(\sim p \vee q \rightarrow r) \wedge s$ | وصلة | وجود القوس |
| $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow s \vee t$ | شرطية مزدوجة | أداة الشرطية المزدوجة ↔ لها الهيمنة |
| $\sim(p \vee q \leftrightarrow r) \wedge s \rightarrow t$ | شرطية | وجود القوس وأداة الشرطية → لها الهيمنة |
| $\sim p \vee q \leftrightarrow r \wedge s \rightarrow t$ | شرطية مزدوجة | أداة الشرطية المزدوجة ↔ لها الهيمنة |

| التقرير | نوع التقرير | السبب |
|---|---|---|
| $\sim p \vee (q \leftrightarrow r \wedge s) \to t$ | شرطية | وجود القوس وأداة الشـرطية $\to$ لها الهيمنة |
| $\sim p \vee (q \leftrightarrow r \wedge s \to t)$ | فاصلة | وجود القوس |

مثال ٩ : أضف أقواس فى كل من التقارير الآتية لتكوين تقرير مركب من النوع الموضح أمـام كل منها وإذا كانت الأقواس غير ضرورية وضح السبب :

(1) - $p \wedge q \to r$ وصلة

(2) - $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$ نفى

(3) - $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$ شرطية مزدوجة

(4) - $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$ وصلة

(5) - $\sim p \vee r \to \sim q$ نفى

(6) - $\sim p \vee r \to \sim q$ فاصلة

(7) - $\sim p \vee r \to \sim q$ شرطية

(8) - $\sim p \vee q \to r \wedge s$ نفى

(9) - $\sim p \vee q \to r \wedge s$ شرطية

(10) - $\sim p \vee q \to r \wedge s$ وصلة

(11) - $\sim p \vee q \to r \wedge s$ فاصلة

(12) - $r \leftrightarrow p \wedge q \to \sim s$ شرطية

(13) - $r \leftrightarrow p \wedge q \to \sim s$ شرطية مزدوجة

(14) - $r \leftrightarrow p \wedge q \to \sim s$ وصلة

(15) - $r \leftrightarrow p \wedge q \to s \vee t$ فاصلة

(16) - $r \leftrightarrow p \wedge q \to s \vee t$ شرطية

الحـــل :

| التقرير بدون أقواس | نوع التقرير المراد تكوينه | التقرير المطلوب |
|---|---|---|
| $p \wedge q \rightarrow r$ | وصلة | $p \wedge (q \rightarrow r)$ |
| $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$ | نفى | $\sim (r \leftrightarrow p \wedge q)$ |
| $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$ | شرطية مزدوجة | $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$<br>أداة الشرطية المزدوجة $\leftrightarrow$ لهـــا الهيمنة |
| $\sim r \leftrightarrow p \wedge q$ | وصلة | $(\sim r \leftrightarrow p) \wedge q$ |
| $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$ | نفى | $\sim (p \vee r \rightarrow \sim q)$ |
| $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$ | فاصلة | $\sim p \vee (r \rightarrow \sim q)$ |
| $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$ | شرطية | $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$<br>أداة الشرطية $\rightarrow$ لها الهيمنة |
| $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$ | نفى | $\sim (p \vee q \rightarrow r \wedge s)$ |
| $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$ | شرطية | $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$<br>لها الهيمنة $\rightarrow$ أداة الشرطية |
| $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$ | وصلة | $(\sim p \vee q \rightarrow r) \wedge s$ |
| $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$ | فاصلة | $\sim p \vee (q \rightarrow r \wedge s)$ |
| $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim s$ | شرطية | $(r \leftrightarrow p \wedge q) \rightarrow \sim s$ |
| $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim s$ | شرطية مزدوجة | $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim s$<br>أداة الشرطية المزدوجة $\leftrightarrow$ لهـــا الهيمنة |

| التقرير المطلوب | نوع التقرير المراد تكوينه | التقرير بدون أقواس |
|---|---|---|
| $(r \leftrightarrow p) \wedge (q \rightarrow \sim s)$ | وصلة | $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim s$ |
| $(r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow s) \vee t$ | فاصلة | $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow s \vee t$ |
| $(r \leftrightarrow p \wedge q) \rightarrow s \vee t$ | شرطية | $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow s \vee t$ |

مثال ١٠ : نفرض التقارير البسيطة

$p$ : الطالب يواظب على حضور المحاضرات

$q$ : الطالب يفهم المقرر

$r$ : الطالب ينجح فى الامتحان

حدد نوع كل من التقارير الآتية من حيث نوع الربط

( نفى – وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة )

ثم اعد صياغة كل منها الى جملة إنشائية .

(1) - $p \rightarrow q$

(2) - $(p \wedge q) \vee r$

(3) - $(p \wedge q) \wedge r$

(4) - $p \wedge (q \rightarrow r)$

(5) - $p \vee (q \rightarrow r)$

(6) - $\sim r \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

الحـــل :

| التقرير | نوع التقرير | التقرير فى صورة إنشائية |
|---|---|---|
| $p \to q$ | شرطية | إذا واظب الطالب على حضور المحـــاضرات فإنه سوف يفهم المقرر . |
| $\sim(\sim q \to r)$ | نفى | ليس صحيحا انه إذا لم يفهم الطالب المقـــرر فإنه ينجح فى الامتحان . |
| $(p \wedge q) \wedge r$ | وصلة | الطالب يواظب على حضور المحـــاضرات و يفهم المقرر ، وينجح فى الامتحان . |
| $p \wedge (q \to r)$ | وصلة | الطالب يواظب على حضور المحاضرات وإذا فهم المقرر فإنه سوف ينجح فى الامتحان . |
| $p \vee (q \to r)$ | فاصلة | الطالب يواظب على حضور المحــاضرات أو إذا فهم المقـــرر فإنـــه ســـوف ينجـــح فى الامتحان. |
| $\sim r \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ | شرطية مزدوجة | الطالب لن ينجح فى الامتحان إذا وفقط إذا كان لا يواظب على حضور المحاضرات أو لا يفهم المقرر . |

## ٤ – كثيرة الحدود البولية Boolean Polynomials

نعلم من دراستنا السابقة أن تشكيل عمليات جمع ( + )، وطرح ( − ) وضرب ( . ) للمتغــير x تقودنا إلى تكوين كثيرة حدود فى المتغير x وبالمثل يمكن تكوين كثيرة حدود فى متغيرين x , y أو أكثر.

مثال ١١ : فيما يلى كثيرات حدود فى متغيرين

$$f(x,y) = x.x - x.y + x.y.y + x.x - x.x.y$$
$$= 2x^2 - xy + xy^2$$

$$g(x,y) = (x-y).(x+y) + x.x.x$$
$$= x^2 - y^2 + x^3$$

والآن نفرض أن المتغيرات $x, y, \ldots$ فى كثيرة الحدود $f(x, y, \ldots)$ تم استبدالها بـأعداد حقيقية $x_0, y_0, \ldots$ . فى هذه الحالة فإن $f(x_0, y_0, \ldots)$ تمثل عددا ناتجا من عمليات جمع وطرح وضرب للأعداد الحقيقية.

مثال ١٢ : نفرض كثيرات الحدود $f(x,y)$ , $g(x,y)$ فى مثال ( ١١ ) . أذن

$$f(3,2) = 3.3 - 3.2 + 3.2.2 + 3.3 - 3.3.2$$
$$= 9 - 6 + 12 + 9 - 18 = 6$$
$$g(0,4) = (0-4).(0+4) + 0.0.0 = -16$$

وعمليات الجمع والطرح والضرب المعرفة للأعداد الحقيقية تؤدى الى عمليات مشابهة تسـمى أيضا جمع وطرح وضرب كثيرات الحدود.

مثال ١٣ : نفرض كثيرات الحدود $f(x,y)$ , $g(x,y)$ فى مثال ( ١١ ) . أذن

$$f(x,y) + g(x,y) = 2x^2 - xy + xy^2 + x^2 - y^2 + x^3$$
$$= 3x^2 - xy + xy^2 - y^2 + x^3$$
$$f(x,y) . g(x,y) = \left(2x^2 - xy + xy^2\right) . \left(x^2 - y^2 + x^3\right)$$

$$= 2x^5 + (y^2 - y + 2)x^4 + (y^2 - y)x^3 - 2x^2y^2 + (-y^4 + y^3)x$$

والآن فى كثيرة الحدود $f(x, y, \ldots)$ بوضع المتغيرات $p, q, \ldots$ والتى تدل على تقـارير غير محددة بدلا من المتغيرات $x, y, \ldots$ وبوضع أدوات الربط $\leftrightarrow , \rightarrow , \vee , \wedge , \sim$

بدلا من عمليات الجمع والطرح والضرب فإن هذا يؤدى إلى بناء تقرير مركب $f(p, q, ..)$ يسمى كثيرة حدود بولية **Boolean Polynomials** .

مثال ١٤ : فيما يأتى أمثلة لكثيرات حدود بولية فى متغيرين

$$f(p,q) = \sim p \wedge \sim q$$
$$g(p,q) = p \leftrightarrow \sim q \wedge p$$
$$h(p,q) = \sim p \to q \wedge (\sim p \leftrightarrow q)$$

مثال ١٥ : فيما يأتى أمثلة لكثيرات حدود بولية فى ثلاث متغيرات

$$u(p,q,r) = \sim p \wedge (q \to r)$$
$$v(p,q,r) = (p \wedge \sim q) \vee r$$
$$w(p,q,r) = \sim r \leftrightarrow q \wedge (\sim p \leftrightarrow q)$$

ويمكن استخدام أدوات الربط $\leftrightarrow$ , $\to$ , $\vee$ , $\wedge$ , $\sim$ للربط بين كثيرات الحدود البولية لذلك يمكننا أن نتحدث عن النفى والوصلة والفاصلة والشرطية و الشرطية المزدوجة لكثيرات الحدود البولية.

مثال ١٦ : فى الجدول الآتى نربط بين بعض كثيرات الحدود البولية الموجودة فى الأمثلة ١٤، ١٥.

| |
|---|
| $f(p,q) \vee g(p,q) = (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \leftrightarrow \sim q \wedge p)$ <br> من نوع الفاصلة |
| $h(p,q) \leftrightarrow \sim f(p,q) = (\sim p \to q \wedge (\sim p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow \sim (\sim p \wedge \sim q)$ <br> من نوع الشرطية المزدوجة |

$$w(s,t,r) \wedge f(p,r) = (\sim r \leftrightarrow t \wedge (\sim s \leftrightarrow t)) \wedge (\sim p \wedge \sim r)$$

من نوع الواصلة

والآن بفرض أن التقارير الغير محددة $p, q, \ldots$ فى كثيرة الحدود البولية $f(p, q, \ldots)$ قد استبدلت بتقارير محددة $p_0, q_0, \ldots$ فإن كثيرة الحدود البولية $f(p_0, q_0, \ldots)$ يصبح لها قيمة حقيقة .

مثال ١٧ : نفرض كثيرة الحدود البولية

$$f(p,q) = p \vee (\sim q \rightarrow p)$$

إذا كان $p_0$ يرمز إلى التقرير " $5 > 3$ "

$q_0$ يرمز إلى التقرير " $2 + 4 = 7$ "

فى هذه الحالة $f(p_0,q_0)$ تمثل التقرير المركب

$$f(p_0,q_0) = p_0 \vee (\sim q_0 \rightarrow p_0)$$

ويقرأ

" $5 > 3$ أو إذا كان $2 + 4 \neq 7$ فإن $5 > 3$ "

وحيث أن $p_0$ له قيمة الحقيقة صواب T

$q_0$ له قيمة الحقيقة خطأ F

| $p_0$ | $q_0$ | $\sim q_0$ | $\sim q_0 \rightarrow p_0$ | $f(p_0,q_0) = p_0 \vee (\sim q_0 \rightarrow p_0)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | F | T | T | T |

أذن $f(p_0,q_0)$ لها قيمة الحقيقة صواب .

مثال ١٨ : نفرض كثيرة الحدود البولية

$$f(p,q) = p \vee (\sim q \rightarrow p)$$

إذا كان $p_1$ يرمز إلى التقرير " مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين "
$q_1$ يرمز إلى التقرير " مجموع عددين زوجيين يكون عدد زوجى "

فى هذه الحالة $f(p_1, q_1)$ تمثل التقرير المركب

$$f(p_1, q_1) = p_1 \vee (\sim q_1 \rightarrow p_1)$$

ويقرأ

" مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين أو إذا كان مجموع عددين زوجين ليس عدد زوجى فإن مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين "

وحيث أن $p_1$ له قيمة الحقيقة صواب T
$q_1$ له قيمة الحقيقة خطأ F

| $p_1$ | $q_1$ | $\sim q_1$ | $\sim q_1 \rightarrow p_1$ | $f(p_1, q_1) = p_1 \vee (\sim q_1 \rightarrow p_1)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | F | T | T | T |

أذن $f(p_1, q_1)$ لها قيمة الحقيقة صواب .

ونلاحظ من مثال ( ١٧ ) ومثال ( ١٨ ) أن التقارير $p_1$ , $q_1$ لها على الترتيب نفس قيم الحقيقة كما للتقارير $p_0$ , $q_0$ كما نلاحظ ان $f(p_1, q_1)$ لها نفس قيمة الحقيقة صواب مثل $f(p_0, q_0)$ .

مثال ١٩ : نفرض كثيرة الحدود البولية

$$f(p,q) = p \vee ( \sim q \to p )$$

إذا كان $p_2$ يرمز الى التقرير " مجموع زوايا المثلث تساوى 150 درجة "
$q_2$ يرمز الى التقرير " مجموع عددين فرديين يكون عدد فردى"

فى هذه الحالة $f(p_2,q_2)$ تمثل التقرير المركب

$$f(p_2,q_2) = p_2 \vee ( \sim q_2 \to p_2 )$$

ويقرأ

" مجموع زوايا المثلث تساوى 150 درجة أو إذا كان مجموع عددين فرديين ليس عدد فردى فإن مجموع زوايا المثلث تساوى 150 درجة "

وحيث أن $p_2$ له قيمة الحقيقة خطأ F
$q_2$ له قيمة الحقيقة خطأ F

| $p_2$ | $q_2$ | $\sim q_2$ | $\sim q_2 \to p_2$ | $f(p_2,q_2) = p_2 \vee ( \sim q_2 \to p_2 )$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | T | F | F |

أذن $f(p_2,q_2)$ لها قيمة الحقيقة خطأ .

ونلاحظ من مثال ( ١٨) ومثال ( ١٩ ) أن قيم الحقيقة للتقارير $p_1$ , $q_1$ تختلف عن قيم الحقيقة للتقارير $p_2$ , $q_2$ كما نلاحظ أن $f(p_1,q_1)$ لها قيمة الحقيقة صواب بينما $f(p_2,q_2)$ لها قيمة الحقيقة خطأ .

ملاحظة : نفرض أن $f(p, q, \ldots)$ كثيرة حدود بولية وأن التقارير $p_1, q_1, \ldots$ لها على الترتيب نفس قيم الحقيقة للتقارير $p_0, q_0, \ldots$ . أذن $f(p_1, q_1, \ldots)$ لها نفس قيمة الحقيقة مثل $f(p_0, q_0, \ldots)$ .

## تعريف ٦ : الافتراضات Propositions

الافتراضات يرمز لها

$$P(p,q,\ldots),Q(p,q,\ldots),\ldots$$

أو اختصارا $P\ ,Q,\ldots$ والافتراض $P(p,q,\ldots)$ هو كثيرة حدود بولية في المتغيرات $p,q,\ldots$ وهذه المتغيرات تمثل تقارير غير محددة.

ووفقا لهذا التعريف فإن الملاحظة السابقة يمكن صياغتها كالآتى :

إذا كانت التقارير $p_1,q_1,\ldots$ لها على الترتيب نفس قيم الحقيقة للتقارير $p_0,q_0,\ldots$ فإن الافتراض $P(p_1,q_1,\ldots)$ له نفس قيمة الحقيقة مثل الافتراض $P(p_0,q_0,\ldots)$ .

أى إن

قيمة الحقيقة للافتراض $P(p,q,\ldots)$ المبنى من أى تقارير محددة تكون دالة فقط فى قيم الحقيقة لهذه التقارير المحددة وليست دالة فى التقارير نفسها.

ومن اسهل الطرق لعرض العلاقة بين قيمة الحقيقة للافتراض $P(p,q,\ldots)$ وقيم الحقيقة للتقارير $p,q,\ldots$ يكون من خلال تكوين جدول الحقيقة وهذا ما سنتعرف عليه فى الفصل الثانى.

مثال ٢٠ : نفرض

$$P(p,q,r)=\sim p\vee r\rightarrow\sim q$$

عين قيمة الحقيقة للافتراض $P(p,q,r)$ وذلك للتقارير $p_0\ ,q_0\ ,r_0$ الآتية:

$p_0$ هو التقرير " المعادلة $2x=1$ ليس لها حل فى مجموعة الأعداد الصحيحة "

$q_0$ هو التقرير " العدد 5 عدد زوجى "

$r_0$ هو التقرير " الأرض تدور حول الشمس "

الحـــل:

فى هذه الحالة $P(p_0, q_0, r_0)$ تمثل التقرير المركب

$$P(p_0, q_0, r_0) = \sim p_0 \vee r_0 \rightarrow \sim q_0$$

ويقرأ

" إذا كان المعادلة $2x = 1$ لها حل فى مجموعة الأعداد الصحيحة أو كانت الأرض تدور حول الشمس فإن العدد5 ليس عدد زوجى "

وحيث أن $p_0$ له قيمة الحقيقة صواب T

$q_0$ له قيمة الحقيقة خطأ F

$r_0$ له قيمة الحقيقة صواب T

| $p_0$ | $q_0$ | $r_0$ | $\sim p_0$ | $\sim q_0$ | $\sim p_0 \vee r_0$ | $P(p_0, q_0, r_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | F | T | F | T | T | T |

أذن $P(p_0, q_0, r_0)$ لها قيمة الحقيقة صواب.

ملاحظة : فى مثال (٢٠) بوضع أى تقارير $p_1, q_1, r_1$ حيث $p_1$ تقرير صواب، $q_1$ تقرير خطأ، $r_1$ تقرير صواب فإن التقرير المركب $P(p_1, q_1, r_1)$ يكون صواب.

# تمارين الفصل الأول

١ - عين الجمل الخبرية والجمل الغير خبرية فيما يلى وإذا كانت الجملة خبرية وضح ما إذا كانت تمثل تقرير بسيط أو تقرير مركب

١ ) الشمس ساطعة .

٢ ) هل الشمس ساطعة ؟

٣ ) لا تقصر فى واجبك .

٤ ) ما أجمل الزهور !

٥ ) الحديد يتمدد بالحرارة وينكمش بالبرودة .

٦ ) مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب طول القاعدة فى الارتفاع .

٧ ) أيهما اكبر $\frac{7}{2}$ أم $\frac{8}{3}$ ؟

٨ ) المثلث له ثلاثة أضلاع أو ثلاثة زوايا .

٩ ) يقال أن الزاويتان متكاملتان إذا كان مجموعهم يساوى 180 درجة .

١٠ ) مجموع عددين فرديين يكون عدد زوجى .

٢ - أكتب التقارير البسيطة المكونة لكل من التقارير المركبة الآتية :

١ ) إذا واظب الطالب على حضور المحاضرات فإنه سوف يفهم المنهج ويجتاز الامتحان.

٢ ) إذا فهمت التقارير والعمليات المنطقية جيدا فعليك البدء فى قراءة الفصل الثانى من الكتاب .

٣ ) نهر النيل شريان الحياة فى مصر وإذا امتدت مياه النيل الى الصحراء فسوف يتم تعميرها .

٤ ) يتم تعمير الصحراء إذا وفقط إذا اخلص الشباب لوطنهم وبذلوا الجهد بسواعدهم.

٥ ) المثلث له ثلاثة أضلاع لكن المربع له أربعة أضلاع .
٦ ) المستقيمان المتعامدان يصنعان زاوية قائمة لكن المستقيمان المتوازيان لا يتقاطعان .
٧ ) ليس صحيحا أنه إذا كان المثلث متساوى الساقين فإنه يكون متساوى الأضلاع .
٨ ) الحديد اقوى من الرصاص وإذا كان العدد x عدد أولى فإن $x + 1$ عدد زوجى.
٩ ) إذا كان العدد x عدد أولى واكبر من 2 فإنه لن يكون عدد زوجى .
١٠ ) ليس صحيحا أنه إذا كان x عددا فرديا فإن x2 يكون عددا زوجيا .

٣ – صنف التقارير المركبة المعطاة فى تمرين (٢) من حيث نوع الربط
( نفى – وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة )
ثم اعد صياغتها من صورة جمل إنشائية الى صورة رموز .

٤ – اعد صياغة كل من التقارير المركبة الآتية من صورة جمل إنشائية الى صورة رموز وصنف كل منها من حيث نوع الربط (نفى – وصلة – فاصلة – شرطية – شرطية مزدوجة):
١ ) إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين فى القياس.
٢ ) إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين.
٣ ) مجموع زوايا المثلث تساوى180 درجة وإذا كان مربع طول الوتر فى مثلث لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث لا يكون قائم الزاوية.
٤ ) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين وكل زاويتين متناظرتين متساويتين.
٥ ) الشكل الرباعى يكون متوازى أضلاع إذا وفقط إذا كان فيه كل ضلعين متقبلين متوازيين أو كل من قطريه ينصف الآخر.
٦ ) إذا كانت أضلاع المثلثان المتناظرة متساوية وكذلك زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس فإن المثلثان يتطابقان.

٧ ) مجموع زوايا المثلث اكبر من قائمتين لكن ليس صحيحا أن المعادلة $5x = 9$ لهـا حل فى مجموعة الأعداد الطبيعية .

٨ ) المعادلة $x^2 + 1 = 0$ ليس لها حل فى مجموعة الأعداد الطبيعيـة أو فى مجموعـة الأعداد النسبية لكن لها حل فى مجموعة الأعداد المركبة .

٩ ) فى الأشكال الهندسية المتطابقة تكون الأضلاع المتناظرة متطابقة وتكـون الزوايـا المتناظرة متطابقة أيضا.

١٠ ) مجموع قياسى أى زاويتين متقابلتين فى شكل رباعى دائرى يسـاوى 180درجـة والعكس صحيح.

٥ - نفرض التقارير البسيطة

p : الجبر صعب

q : المنطق الرياضى سهل

r : التفاضل شيق

صنف التقارير الآتية من حيث نوع الربط (نفى - وصلة - فاصلة - شرطية - شـرطية مزدوجة) ثم اعد صياغتها من صورة جمل إنشائية الى صورة رموز مستخدما أدوات الربط والأقواس المناسبة

| | |
|---|---|
| ١ - الجبر سهل . | ٦ - إذا كان المنطق سهل فإن التفـاضل يكـون شيق. |
| ٢ - التفاضل شيق أو الجبر سهل . | ٧ - الجبر صعب إذا وفقط إذا كان المنطق صعب. |
| ٣ - الجبر ليس سهل لكـن المنطـق سهل. | ٨ - التفاضل غير شيق أو الجبر صعب ، لكـن المنطق سهل . |
| ٤ - من الخطأ القول أن المنطق سـهل والجبر صعب. | ٩ - التفاضل شيق و الجبر سهل ، لكن المنطـق ليس سهل. |
| ٥ - إما المنطق سهل أو التفاضل غـير شيق . | ١٠- إذا كان المنطق سهل فإن التفاضل يكـون شيق والجبر يكون سهل . |

٦ - باستخدام التقارير البسيطة p , q , r في التمرين ( ٥ ) أكتب تقارير فى صورة جمـــل إنشائية تصف كل من التقارير الرمزية الآتية مع تصنيف كل منها من حيـــث نـــوع أداة الربط:

| | |
|---|---|
| (1) - $p \wedge (q \vee r)$ | (6) - $r \leftrightarrow p \wedge q$ |
| (2) - $(p \wedge q) \vee r$ | (7) - $\sim p \vee q \rightarrow r$ |
| (3) - $\sim (p \wedge q)$ | (8) - $r \leftrightarrow \sim p \vee q$ |
| (4) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$ | (9) - $\sim (p \vee q \leftrightarrow r)$ |
| (5) - $\sim p \vee q \rightarrow r$ | (10) - $(\sim p \vee r) \wedge q$ |

٧ - أضف أقواس فى كل من التقارير الآتية لتكوين تقرير مركب من النوع الموضح أمام كـــل منها وإذا كانت الأقواس غير ضرورية وضح السبب

| التقرير | نوع التقرير المطلوب تكوينه |
|---|---|
| $p \wedge q \rightarrow r \vee \sim q$ | وصلة |
| $p \wedge q \rightarrow r \vee \sim q$ | فاصلة |
| $p \wedge q \rightarrow r \vee \sim q$ | شرطية |
| $\sim r \vee p \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim q$ | نفى |
| $\sim r \vee p \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim q$ | وصلة |
| $\sim r \vee p \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim q$ | فاصلة |

| شرطية | $\sim r \vee p \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim q$ |
|---|---|
| شرطية مزدوجة | $\sim r \vee p \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim q$ |
| وصلة | $\sim p \vee r \wedge s \rightarrow \sim q$ |
| فاصلة | $\sim p \vee r \wedge s \rightarrow \sim q$ |

٨ - نفرض كثيرات الحدود البولية :

$$f(p,q) = p \rightarrow \sim q$$
$$g(p,q) = p \leftrightarrow \sim q \vee p$$
$$h(p,q,r) = \sim p \rightarrow (\sim q \leftrightarrow r)$$

أوجد كل مما يأتى :

1 ) - $f(p,q) \vee g(p,q)$

2 ) - $f(r,s) \rightarrow \sim g(s,r)$

3 ) - $f(p,s) \rightarrow g(p,r) \vee \sim h(r,s,p)$

4 ) - $\sim h(r,s,t) \wedge g(p,t) \rightarrow \sim f(s,p)$

5 ) - $h(p,q,r) \leftrightarrow \sim f(p,q) \vee g(p,q)$

6 ) - $g(s,t) \leftrightarrow f(s,p) \wedge \sim h(s,t,p)$

٩ - نفرض كثيرة الحدود البولية $f(p,q) = \sim p \vee q$

أوجد قيمة الحقيقة لكثيرة الحدود $f(p,q)$ فى كل من الحالات الآتية ووضح ماذا تلاحظ:

( ١ ) التقرير $p$ : " $5 > 2$ "

التقرير $q$ : " 3 عدد فردى "

( ٢ ) التقرير $p$ : " مجموع زوايا المثلث قائمتين "
التقرير $q$ : " $6$ عدد فردى "

( ٣ ) التقرير $p$ : "المعادلة $3x + 2 = 0$ لها حل فى مجموعة الأعداد الصحيحة"
التقرير $q$ : " القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية "

( ٤ ) التقرير $p$ : "المعادلة $3x + 2 = 0$ لها حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية"
التقرير $q$ : "المستقيمان المتعامدان يصنعان زاوية قائمة "

( ٥ ) التقرير $p$ : " المثلث له ثلاثة أضلاع و ثلاثة زوايا "
التقرير $q$ : " مجموع عددين فرديين يكون عدد زوجى أو عدد أولى "

( ٦ ) التقرير $p$ : " إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين "
التقرير $q$ : "المثلث يكون متساوى الأضلاع إذا كان متساوى الساقين"

( ٧ ) التقرير $p$ : " ليس صحيحا أن $2 + 3 \neq 4$ أو $5 + 2 = 7$ "
التقرير $q$ : " ليس صحيحا أن مجموع زوايا المثلث اكبر من قائمتين "

( ٨ ) التقرير $p$ : "أهرامات الجيزة وسور الصين العظيم من عجائب الدنيا السبع"
التقرير $q$ : " ليس صحيحا أن مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين "

( ٩ ) التقرير $p$ : " المعادلة $5x + 3 = 18$ ليس لها حل فى مجموعة الأعداد الطبيعية "
التقرير $q$ : " ليس صحيحا أن مجموع زوايا المثلث اكبر من قائمتين "

( ١٠ ) التقرير p : " المثلث متساوى الأضلاع إذا وفقط إذا كان متساوى الزوايا "

التقرير q : " ليس صحيحا أن مجموع زوايا المثلث لا تساوى قائمتين "

١٠ – عين قيمة الحقيقة للافتراض

$$P(p,q,r) = \sim r \wedge p \rightarrow \sim q$$

فى كل من الحالات الآتية ووضح ماذا تلاحظ :

( ١ ) التقرير p : " $2 + 3 \neq 4$ "

التقرير q : " المعادلة $3x + 6 = 0$ لها حل فى مجموعة الأعداد الصحيحة "

التقرير r : " 7 عدد فردى "

( ٢ ) التقرير p : " المثلث له ثلاثة أضلاع أو ثلاثة زوايا "

التقرير q : " المعادلة $x^2 + 4 = 0$ ليس لها حل فى مجموعة الأعداد الحقيقية "

التقرير r : " العدد 7 عدد فردى لكن غير أولى "

( ٣ ) التقرير p : " المعادلة $x + 2 = 0$ لها حل فى مجموعة الأعداد الطبيعية"

التقرير q : " مجموع عددين زوجين يكون عدد فردى أو عدد أولى"

التقرير r : " العدد 7 عدد أولى لكن غير زوجى "

( ٤ ) التقرير p : " $2 + 3 = 5$ و ليس صحيحا أن $2^3 = 8$ إذا وفقط إذا كان $3^2 = 9$ "

التقرير q : " المستطيل له أربعة أضلاع "

التقرير r : " العدد 8 عدد ليس أولى لكن غير فردى "

( ٥ ) التقرير p : " العدد 17 عدد ليس أولى لكن غير فردى "

التقرير q : " المثلث يكون متساوى الساقين إذا كان متساوى الأضلاع "

التقرير r : " إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين وكل زاويتين متناظرتين متساويتين"

الفصل



# جداول الحقيقة

# Truth Tables

## ١ – أداة النفى Negation

نفى التقرير البسيط p هو "ليس p" ويرمز لذلك p ~ وإذا كان التقرير المعطى صواب T فإن نفيه يكون تقريرا خاطئا F والعكس بالعكس ، ونلاحظ انه مهما كان التقرير p فإنه

إما أن يكون التقرير p صواب T وبالتالى p ~ يكون خطأ F

أو يكون التقرير p خطأ F وبالتالى p ~ يكون صواب T

ويمكن تلخيص ذلك فى الجدول الآتى والذى يعرف باسم جدول الحقيقة للتقرير p ~

| p | ~ p |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

وكما هو معلوم فإن نفى النفى يكون إثبات، وبالتالى p ~ ~ يكون هو نفسه p .

مثال ١ :

١ - التقرير "مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين" هو تقرير صواب T

ونفى التقرير يكون "مجموع زوايا المثلث لا يساوى قائمتين" وهو تقرير خطأ F

٢ - التقرير " $2 + 3 = 6$ " هو تقرير خطأ F

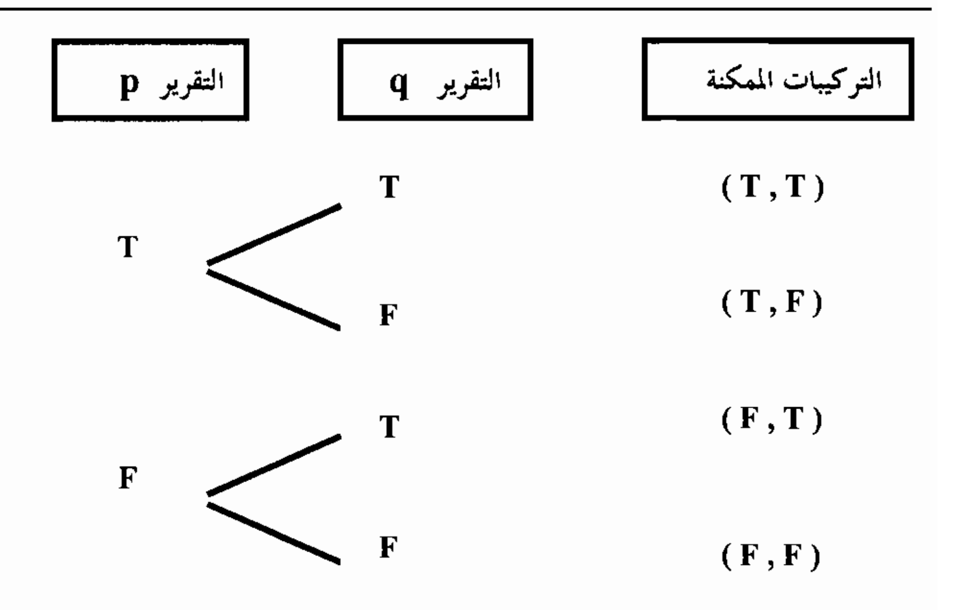
ونفى التقرير يكون " $2 + 3 \neq 6$ " وهو تقرير صواب T

## ٢ - أداة الوصل " و " Conjunction

إذا كان كل من q , p تقريرا بسيطا فإن التقرير "p و q " يكون تقرير مركب ويرمز له $p \wedge q$ ، وحيث أن قيم الحقيقة الممكنة للتقرير p هى صواب T أو خطأ F وعددها يساوى 2 وبالمثل قيم الحقيقة الممكنة للتقرير q هى صواب T أو خطأ F وعددها يساوى 2 ، أذن التركيبات الممكنة من قيم الحقيقة للتقريرين p , q عددها $2^2 = 4$ كالآتى:

- التقرير p صواب T والتقرير q صواب T
- التقرير p صواب T والتقرير q خطأ F
- التقرير p خطأ F والتقرير q صواب T
- التقرير p خطأ F والتقرير q خطأ F

ويمكن الوصول الى هذه التركيبات باستخدام طريقة الشجرة الموضحة بالشكل




والسؤال الآن " ما هى قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \wedge q$ ؟ "

وللتعرف على أجابه لهذا السؤال ، نناقش المثال الآتى :

مثال ٢ : قال سمير " ذهبت الى الحديقة واشتريت زهور "

نفرض التقرير p : ذهب سمير الى الحديقة

والتقرير q : اشترى سمير زهور

وعلى ضؤ الاستعمالات فى حياتنا اليومية لأداة الوصل " و " دعنا نبحث متى يكون سمير على صدق ( صائب ) فى كلامه ومتى يكون كاذب (خاطئ)، أى نبحث متى يكون $p \wedge q$ صواب ومتى يكون خطأ، ومن الواضح أن سمير يكون صائب فى قوله إذا ما ثبت انه

ذهب إلى الحديقة واشترى زهور ( p صواب، q صواب)

ولكنه يكون خاطئ فى قوله إذا ما ثبت لنا أحد الأمور الثلاث الآتية :

١ – ذهب سمير الى الحديقة ولكنه لم يشترى زهور ( p صواب ، q خطـأ )

٢ – سمير لم يذهب الى الحديقة ولكنه اشترى زهور ( p خطـأ ، q صواب )

٣ – سمير لم يذهب الى الحديقة ولم يشترى زهور ( p خطـأ ، q خطـأ )

وبالتالى فإن قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \wedge q$ تحقق الخاصية :

**التقرير المركب $p \wedge q$ يكون صواب فقط إذا كان التقرير p صواب والتقرير q صواب ويكون التقرير المركب $p \wedge q$ خطـأ فيما عدا ذلك.**

وجدول الحقيقة للتقرير $p \wedge q$ يكون كالآتى:

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

ونلاحظ أن التقارير البسيطة p , q تمثل الأعمدة الأولى بالجدول ، وتوجد فى الجـدول صفوف كافية لجميع التركيبات الممكنة من قيم الحقيقة للتقريرين وعددهم أربعـة صفـوف، وبوجه عام إذا كان التقرير المركب يحتوى على n من التقارير البسيطة فإنه يوجد $2^n$ من التركيبات الممكنة من قيم الحقيقة ، أى إن جدول الحقيقة يحتوى على $2^n$ مـن الصفـوف، فمثلا إذا كان التقرير المركب يحتوى على3 من التقارير البسيطة p, q, r فإنه يوجد $= 2^3$ 8 من التركيبات الممكنة من قيم الحقيقة موزعة فى جدول الحقيقة كالآتى :

| p | q | r |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | T | F |
| T | F | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | T | F |
| F | F | T |
| F | F | F |

ويمكن الوصول الى هذه التركيبات باستخدام طريقة الشجرة الموضحة بالشكل

التقرير p | التقرير q | التقرير r | التركيبات الممكنة

T
T
T (T , T , T)
F (T , T , F)
F
T (T , F , T)
F (T , F , F)
F
T
T (F , T , T)
F (F , T , F)
F
T (F , F , T)
F (F , F , F)

مثال ٣ : نفرض التقارير

$p$ : $4 > 3$

$q$ : 7 عدد زوجى

$r$ : القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية

نلاحظ أن التقرير $p$ صواب ، التقرير $q$ خطأ والتقرير $r$ صواب

أذن التقرير المركب $p \wedge q$ يكون خطــأ

والتقرير المركب $p \wedge r$ يكون صواب .

مثال ٤ : أوجد جدول الحقيقة للتقرير $\sim(p \wedge \sim q)$

الحل : التقرير من نوع النفى وجدول الحقيقة يكون كالآتى :

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $\sim(p \wedge \sim q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T |
| T | F | T | T | F |
| F | T | F | F | T |
| F | F | T | F | T |

وتوجد طريقة ثانية لتكوين جدول الحقيقة نوضحها على التقرير المركب $\sim(p \wedge \sim q)$ وهى كما يأتى :

١ ) – نرسم الجدول الآتى

| $p$ | $q$ | $\sim$ | $($ $p$ | $\wedge$ | $\sim$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | | | | | |
| T | F | | | | | |
| F | T | | | | | |
| F | F | | | | | |
| Step 1 | Step 2 | | | | | |

والتقرير المركب يكتب فى الصف العلوى على يمين التقارير البسيطة ونلاحظ انه يوجد عمود تحت كل تقرير بسيط أو أداة ربط فى التقرير المركب .

ب ) – نقوم بإدخال قيم الحقيقة فى الجدول على خطوات حيث نبدأ أولا بإدخال قيم الحقيقة للتقارير البسيطة ويكتب رقم الخطوة اسفل العمود المناظر لكل تقرير بسيط، وبعد ذلك نبدأ بإدخال قيم الحقيقة فى العمود المناظر لأداة الربط الأقل هيمنة ونستمر فى هذا التدرج حتى نصل الى العمود المناظر لأداة الربط المهيمنة والتى تحدد نوع التقرير المركب وفى كل مرة يكتب رقم الخطوة اسفل العمود المناظر لأداة الربط، وبالنسبة للتقرير المركب $\sim (p \wedge \sim q)$ يتم تكوين جدول الحقيقة كالآتى:

| p | q | ~ | ( p | ∧ | ~ | q ) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | T | F |
| F | T | T | F | F | F | T |
| F | F | T | F | F | T | F |
| Step 1 | Step 2 | Step5 | Step 1 | Step4 | Step3 | Step 2 |

١ – نقوم بإدخال قيم الحقيقة للتقارير البسيطة $p$ , $q$ ويكتب رقم الخطوة اسفل العمود المناظر .

٢ – التقرير المركب $\sim (p \wedge \sim q)$ من نوع النفى وأداة الربط داخل القوس والأقل هيمنة هى نفى $q$ لذلك نقوم بحساب قيم الحقيقة لأداة نفى $q$ ويكتب رقم الخطوة وهى 3 اسفل العمود المناظر.

٣ – نقوم بحساب قيم الحقيقة لأداة الوصل $\wedge$ وذلك بمقارنة الأعمدة فى الخطوات 3 , 1 ويكتب رقم الخطوة وهى 4 اسفل العمود المناظر.

٤ – نقوم بحساب قيم الحقيقة لأداة النفى ~ وذلك بنفى قيم الحقيقة فى الخطوة 4 ويكتب رقم الخطوة وهى 5 اسفل العمود المناظر وبذلك يكتمل الجدول .

و إذا كان التقرير المركب معقد ويحتوى على الكثير من أدوات الربط فإنه يفضل استخدام هذه الطريقة لتكوين جدول الحقيقة لأنها تكـــون أسرع وتأخذ مساحة اقل فى الحل.

## ٣ – أداة الفصل " أو " Disjunction

إذا كان كل من $p$ , $q$ تقريرا بسيطا فإن التقرير " $p$ أو $q$ " يكون تقرير مركب ويرمـــز له $p \vee q$ ، وقيم الحقيقة الممكنة للتقرير $p$ هى صواب $T$ أو خطـــــأ $F$ وعددهـــا يساوى 2 وبالمثل قيم الحقيقة الممكنة للتقرير $q$ هى صواب $T$ أو خطــــــأ $F$ وعددهـــا يساوى 2، والسؤال الآن

" ما هى قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \vee q$ ؟ "

وللتعرف على قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \vee q$ ناقش المثال الآتى:

مثال ٥ : عندما نقول " ذهب سمير إلى الحديقة أو ذهب إلى المسرح "

نفرض التقرير $p$ : ذهب سمير إلى الحديقة

والتقرير $q$ : ذهب سمير إلى المسرح

وعلى ضؤ الاستعمالات فى حياتنا اليومية لأداة الفصل " أو " فإننا نكون صادقين فى الحـــالات الثلاث الآتية:

١ – ذهب سمير إلى الحديقة وكذلك ذهب إلى المسرح ( $p$ صواب ، $q$ صواب )

٢ – ذهب سمير إلى الحديقة ولكنه لم يذهب إلى المسرح ( $p$ صواب ، $q$ خطـــأ )

٣ – سمير لم يذهب إلى الحديقة ولكنه ذهب إلى المسرح ( $p$ خطـــأ ، $q$ صواب )

ولكننا بالطبع نكون غير صادقين إذا تبين أن

سمير لم يذهب إلى الحديقة و لم يذهب إلى المسرح ( $p$ خطـــأ ، $q$ خطـــأ )

ومن ذلك نلاحظ أن أداة الربط $\vee$ تعنى إما $p$ أو $q$ أو كلاهما وبالتالى فإن التقريـــر المركب $p \vee q$ يكون صواب فى ثلاث حالات

١ - $p$ صواب ، $q$ صواب

٢ - $p$ صواب ، $q$ خطـــأ

٣ - $p$ خطـــأ، $q$ صواب

ويكون التقرير المركب $p \vee q$ خطـــأ فقط إذا كان $p$ خطأ، $q$ خطأ.

وبالتالى فإن قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \vee q$ تحقق الخاصية:

**التقرير المركب $p \vee q$ يكون خطأ فقط إذا كـــان التقرير $p$ خطأ والتقريـــر $q$ خطـــأ ويكـــون التقريـــر المركب $p \vee q$ صواب فيما عدا ذلك .**

وجدول الحقيقة للتقرير $p \vee q$ يكون كالآتى:

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

وعند استخدامنا لأداة الفصل " أو " إذا كان المعنى المقصود هو

" إما $p$ أو $q$ وليس كلاهمـــا "

فى هذه الحالة فإن أداة الفصل " أو " تسمى أداة الفصل الأستبعادية ويرمز لها $\underline{\vee}$ ، أى إن

$p \underline{\vee} q$ تعنى إما p أو q وليس كلاهما

وللتعرف على قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \underline{\vee} q$ نناقش المثال الآتى:

مثال ٦ : عندما ظهرت نتيجة الثانوية العامة كان حسين ضمن الناجحين ولقد سأله والده أى كلية تريد أن تلتحق ؟

أجاب حسين " سألتحق بكلية الطب أو كلية الصيدلة "

نلاحظ أن حسين أجاب بتقرير مركب يتكون من التقريرين

التقرير p : حسين سيلتحق بكلية الطب

والتقرير q : حسين سيلتحق بكلية الصيدلة

والتقرير المركب الذى قاله حسين يمكن التعبير عنه بالصورة $p \underline{\vee} q$ ، ومن المستحيل أن يلتحق حسين بالكليتين فى نفس الوقت، ولكن من المؤكد أن حسين سوف يلتحق بكلية واحدة فقط، قد تكون كلية الطب وقد تكون كلية الصيدلة وربما يلتحق حسين بكلية أخرى غير هاتين الكليتين وبناء على ذلك فإن ما قاله حسين ( أى إن التقرير المركب $p \underline{\vee} q$ ) يكون صواب فى الحالتين:

١ - يلتحق حسين بكلية الطب(p صواب) وبالتالى لن يلتحق بكلية الصيدلة ( q خطأ)

٢ - لن يلتحق حسين بكلية الطب (p خطأ) وبالتالى يلتحق بكلية الصيدلة ( q صواب)

وما قاله حسين ( أى إن التقرير المركب $p \underline{\vee} q$ ) يكون خطأ فى الحالة :

لم يلتحق حسين بكلية الطب ( p خطأ ) ولم يلتحق بكلية الصيدلة ( q خطأ )

هذا بالإضافة الى الحالة المستحيل حدوثها

يلتحق حسين بكلية الطب ( p صواب ) و يلتحق بكلية الصيدلة ( q صواب )

ومن ذلك نلاحظ أن التقرير المركب $p \veebar q$ يكون صواب فى الحالتين:

١ - p صواب ، q خطــأ
٢ - p خطــأ ، q صواب

ويكون التقرير المركب $p \veebar q$ خطــأ فى الحالتين :

١ - p صواب ، q صواب
٢ - p خطــأ ، q خطـأ

وبالتالى فإن قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \veebar q$ تحقق الخاصية:

**التقرير المركب $p \veebar q$ يكون خطأ فقط إذا كان كل مـــن p , q صواب معا أو خطأ معا ويكون التقرير المركب $p \veebar q$ صواب فيما عدا ذلك .**

وجدول الحقيقة للتقرير $p \veebar q$ يكون كالآتى :

| p | q | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

مثال ٧ : كون جدول الحقيقة بطريقتين مختلفتين للتقرير $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

الحل : التقرير من نوع الفاصلة

الطريقة الأولى :

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F | F |
| T | F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F | T |

الطريقة الثانية :

| p | q | $\sim$ | p | $\vee$ | (p | $\wedge$ | $\sim$ | q) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | F | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | T | T | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F | F | T |
| F | F | T | F | T | F | F | T | F |
| Step 1 | Step 2 | Step 5 | Step 1 | Step 6 | Step 1 | Step 4 | Step 3 | Step 2 |

## ٤ – أداة الربط الشرطية "إذا كان فإن ..." Conditional

إذا كان كل من $q$ , $p$ تقريرا بسيطا فإن التقرير " إذا كان $p$ فإن $q$ " يكون تقريـــر مركب ويرمز له $p \rightarrow q$ ويسمى تقريـــرا شرطيا، وهو يعنى أن التقرير $q$ يكون صواب بشرط أن التقرير $p$ يكون صواب ، والسؤال الآن

" ما هى قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \rightarrow q$ ؟ "

وللتعرف على قيم الحقيقة للتقرير المركب $p \rightarrow q$ نناقش الأمثلة الآتية :

مثال ٨ : وعد الوالد ابنه قائلا :

" إذا نجحت فى الامتحان فسأشترى لك هدية "

نفرض التقرير $p$ : الابن نجح فى الامتحان

والتقرير $q$ : اشترى الوالد لابنه هدية

وعلى ضؤ الاستعمالات فى حياتنا اليومية لأداة الربط الشرطية " إذا كان ... فـــإن ... " دعنا نبحث صدق أو عدم صدق الوالد فيما وعد به ابنه ، أى نبحث مـــتى يكـــون التقريـــر المركب $p \rightarrow q$ صواب ومتى يكون خطأ. من الواضح أنه لدينا أحد الاحتمالات الأربـع الآتية :

<u>١ – نجح الابن فى الامتحان واشترى له والده هدية ( $p$ صواب، $q$ صواب )</u>

وفى هذه الحالة فإن الوالد يكون صادقا فى وعده، أى إن $p \rightarrow q$ يكون صواب.

<u>٢ – نجح الابن فى الامتحان ولم يشترى له والده هدية ( $p$ صواب، $q$ خطأ )</u>

وفى هذه الحالة فإن الوالد لا يكون صادقا فى وعده ، أى إن $p \rightarrow q$ يكون خطأ .

<u>٣ – لم ينجح الابن فى الامتحان واشترى له والده هدية ( $p$ خطأ، $q$ صواب )</u>

وفى هذه الحالة فإن الوالد يكون صادقا أيضا فى وعده لأنه قال ما سوف يحدث إذا نجـح الابن ولكنه لم يذكر شئ عما يحدث إذا لم ينجح الابن وبالتالى $p \rightarrow q$ يكون صواب.

٤ - لم ينجح الابن فى الامتحان ولم يشترى له والده هدية ( $p$ خطأ، $q$ خطأ )

وفى هذه الحالة فإن الوالد يكون صادقا أيضا فى وعده لأنه قال ما سوف يحدث إذا نجح الابن وحيث أن الابن لم ينجح فإن الوالد غير مطالب بتنفيذ وعده وبالتالى $p \to q$ يكون صواب.

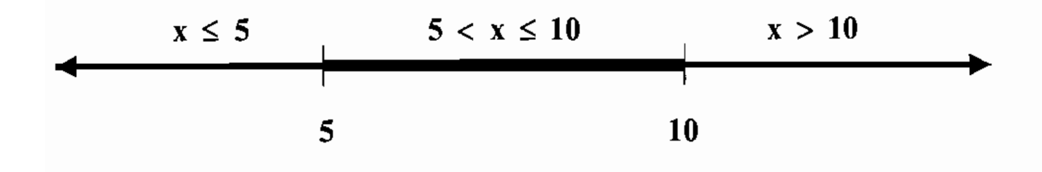
ومن الواضح أن الوالد يكون صادقا فى قوله ويفى بوعده لابنه فى جميع هذه الحالات ما عدا الحالة الثانية حيث نجح الابن فى الامتحان فعلا ولكن الوالد لم يفى بوعده له ولم يشترى له الهدية .

مثال ٩ : نفرض التقارير البسيطة

$$p : x > 10$$
$$q : x > 5$$

التقرير المركب " إذا كان $x > 10$ فإن $x > 5$ " من نوع الشرطية على الصورة $p \to q$ وهذا التقرير يخبرنا بأن $x > 5$ بشرط أن $x > 10$ وبديهيا فإننا نعلم انه إذا كان $x > 10$ فمن المؤكد أن $x > 5$ لذلك فإن التقرير المركب المعطى يكون صواب هذا على الرغم من أن التقرير لا يخبرنا بأى معلومة عن موقع العدد $x$ بالنسبة للعددين $5, 10$ وعلى ذلك فإن التقرير " إذا كان $x > 10$ فإن $x > 5$ " يكون صواب دائما مهما كان موقع العدد $x$ بالنسبة للعددين $5, 10$ .

والآن عندما نبحث عن الاحتمالات الممكنة لوقوع العدد $x$ بالنسبة للعددين $10 , 5$ نجد أن هناك ثلاث احتمالات ممكنة موضحة على خط الأعداد وهى :



الاحتمال الأول : العدد $x$ واقع فى الفترة $(10 , \infty)$ ، أى إن $x > 10$
وفى هذه الحالة فإن

$x > 10$ يكون صواب ، أى إن $p$ صواب .

$x > 5$ يكون صواب ، أى إن $q$ صواب .

الاحتمال الثانى : العدد $x$ واقع فى الفترة $]10 , 5)$ ، أى إن $5 < x \leq 10$
وفى هذه الحالة فإن

$x > 10$ يكون خطأ ، أى إن $p$ خطأ .

$x > 5$ يكون صواب ، أى إن $q$ صواب .

الاحتمال الثالث : العدد $x$ واقع فى الفترة $]5 , -\infty)$ ، أى إن $x \leq 5$
وفى هذه الحالة فإن

$x > 10$ يكون خطأ ، أى إن $p$ خطأ .

$x > 5$ يكون خطأ ، أى إن $q$ خطأ .

وفى جميع الاحتمالات الثلاث فإن التقرير المركب $q \rightarrow p$ يكون صواب دائما ، ويوجد احتمال آخر لا يمكن أخذه فى الاعتبار وهو :

الاحتمال الرابع : أن يكون العدد $x$ واقع فى الفترة $(10 , \infty)$ وفى نفس الوقت واقع فى الفترة $]5 , -\infty)$ وفى هذه الحالة فإن

$x > 10$ يكون صواب ، أى إن $p$ صواب .

$x > 5$ يكون خطأ ، أى إن $q$ خطأ .

وهذه حالة مستحيلة الحدوث ولذلك فإن التقرير المركب $q \rightarrow p$ بديهيا يكون خطأ فى هذه الحالة .

ومن مناقشتنا فى الأمثلة ٨، ٩ نستنتج أن قيم الحقيقة للتقرير المركب $q \rightarrow p$ تحقق الخاصية :

التقرير المركب $q \rightarrow p$ يكون خطأ فقط إذا كان $p$ صـــواب، $q$ خطأ ويكون التقرير المركب $q \rightarrow p$ صواب فيمـــا عـــدا ذلك .

وجدول الحقيقة للتقرير $q \rightarrow p$ يكون كالآتى :

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

ملاحظة : التقرير المركب $q \rightarrow p$ " إذا كان $p$ فإن $q$ "

يمكن صياغته بطرق مختلفة كالآتى :

١ - إذا أعطيت $p$ فإن $q$

٢ - بفرض $p$ فإن $q$

٣ - كلما كانت $p$ فإن $q$

٤ - $p$ يؤدى إلى $q$

٥ - $p$ شرط كافى لـــ $q$

٦ - $q$ كلما كان $p$

٧ - $q$ بشرط $p$ ( $q$ إذا $p$ )

٨ - $q$ شرط ضرورى لـــ $p$

٩ - الشرط الضرورى لـــ $p$ هو $q$

١٠ - الشـــرط الكافى لـــ $q$ هو $p$

وفى المثال الآتى نوضح بعض من هذه الصياغات المختلفة للشرطية $q \rightarrow p$ .

مثال ١٠ : نفرض التقارير البسيطة

$p$ : اليوم هو يوم الجمعة

$q$ : غدا هو يوم السبت

فى الجدول الآتى نضع الصورة الرمزية لبعض التقارير المكتوبة فى صورة جمل إنشائية :

| التقرير فى صورة جملة إنشائية | التقرير فى صورة رموز |
|---|---|
| ١ - إذا كان اليوم هو يوم الجمعة فإن غدا هو يوم السبت . | $p \rightarrow q$ |
| ٢ - إذا كان غدا لن يكون السبت فإن اليوم ليس هو يوم الجمعة. | $\sim q \rightarrow \sim p$ |
| ٣ - غدا هو يوم السبت إذا كان اليوم هو يوم الجمعة. | $p \rightarrow q$ |
| ٤ - اليوم هو يوم الجمعة شرط كاف لكى يكون غدا هو يوم السبت . | $p \rightarrow q$ |
| ٥ - الشرط الضرورى لكى يكون غدا هو يوم السبت هو أن يكون اليوم هو الجمعة. | $q \rightarrow p$ |
| ٦ - غدا لن يكون يوم السبت لكن إذا كان اليوم هو يوم الجمعة فإن غدا هو يوم السبت . | $\sim q \wedge (p \rightarrow q)$ |
| ٧ - إما اليوم هو يوم الجمعة أو إذا كان غدا ليس السبت فإن اليوم ليس هو يوم الجمعة . | $p \veebar (\sim q \rightarrow \sim p)$ |
| ٨ - من الخطأ القول أن الشرط الضرورى لكى يكون غــدا الســبت هو أن يكون اليوم ليس الجمعة . | $\sim (q \rightarrow \sim p)$ |

| التقرير فى صورة جملة إنشائية | التقرير فى صورة رموز |
|---|---|
| ٩ - غدا هو يوم السبت لكن إذا كان اليوم ليس الجمعة فإن غدا لن يكون السبت . | $q \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$ |
| ١٠- أن لا يكون غدا هو يوم السبت شرط كاف لكى لا يكون اليوم هو الجمعة . | $\sim q \rightarrow \sim p$ |

مثال ١١ : كون جدول الحقيقة للتقرير المركب الآتى :

" نهر النيل هو شريان الحياة فى مصر وامتداد مياه النيل إلى الصحراء شرط كاف لتعميرها . "

الحل : التقارير البسيطة المكونة للتقرير المركب هى :

$p$ : نهر النيل هو شريان الحياة فى مصر

$q$ : مياه النيل تمتد إلى الصحراء

$r$ : الصحراء يتم تعميرها

أذن التقرير فى صورة رمزية يكون $p \wedge (q \rightarrow r)$ وهو تقرير من نوع الوصلة، وجدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى :

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \rightarrow r$ | $p \wedge (q \rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | F |
| T | F | T | T | T |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | T | F |
| F | T | F | F | F |
| F | F | T | T | F |
| F | F | F | T | F |

مثال ١٢ : كون جدول الحقيقة للتقرير $p \vee \sim(q \wedge r) \rightarrow p \vee q$

الحل : التقرير من نوع الشرطية

وجدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى :

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $q \wedge r$ | $\sim(q \wedge r)$ | $p \vee \sim(q \wedge r)$ | التقرير |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | F | T | T |
| T | T | F | T | F | T | T | T |
| T | F | T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | T | F | T | T | T |
| F | T | T | T | T | F | F | T |
| F | T | F | T | F | T | T | T |
| F | F | T | F | F | T | T | F |
| F | F | F | F | F | T | T | F |

## ٥ – أداة الربط الشـــرطية المزدوجـــة "... إذا وفقـــط إذا كـــان... " Biconditional

إذا كان كل من $q$ , $p$ تقريرا بسيطا فإن التقرير " $p$ إذا وفقط إذا كان $q$ " يكون تقرير مركب وهو يعنى " إذا كان $p$ فإن $q$ و إذا كان $q$ فإن $p$ " ويرمز لـــــه $p \leftrightarrow q$ ويكتب أحيانا على الصورة $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ويمكن تكوين جدول الحقيقـــــة للتقرير $p \leftrightarrow q$ بالاستعانة بجدول الحقيقة لأداة الربط الشرطية $\rightarrow$ وأداة الوصـــــل $\wedge$ كالآتى :

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |

وبالتالى فإن قيم الحقيقة للتقرير المركب $q \leftrightarrow p$ تحقق الخاصية :

**التقرير المركب $q \leftrightarrow p$ يكون صواب إذا كان $q$ ، $p$ صواب معا أو خطأ معا ويكون التقرير المركب $q \leftrightarrow p$ خطأ فيما عـــدا ذلك.**

**ملاحظة : التقرير المركب $q \leftrightarrow p$ " $p$ إذا وفقط إذا كان $q$ " يمكن صياغته بطرق مختلفة كالآتى :**

**١ - $p$ إذا و إذا فقط $q$**

**٢ - $p$ إذا $q$ والعكس صحيح**

**٣ - إذا كان $p$ فإن $q$ والعكس صحيح**

**٤ - الشرط الضرورى و الكافى لـــ $p$ هو $q$**

**٥ - $p$ شرط ضرورى و كاف لـــ $q$**

مثال ١٣ : التقرير

" إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فانه يكون متساوى الزوايا
وإذا كان متساوى الزوايا فإنه يكون متساوى الأضلاع "

يمكن صياغته باستخدام أداة الشرطية المزدوجة كالآتى :

" المثلث متساوى الأضلاع إذا وفقط إذا كان متساوى الزوايا "

" المثلث متساوى الأضلاع ↔ متساوى الزوايا "

" إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فانه يكون متساوى الزوايا والعكس صحيح "

" الشرط الضرورى والكافى لتساوى أضلاع المثلث هو تساوى زواياه "

" تساوى أضلاع المثلث شرط ضرورى وكافى لتساوى زواياه "

مثال ١٤ : كون جدول الحقيقة للتقرير

$$\left(p \rightarrow (\sim q \vee r)\right) \wedge \sim\left(q \vee (p \leftrightarrow \sim r)\right)$$

الحل : التقرير من نوع الوصلة

وجدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى :

| p | q | r | $(p$ | $\rightarrow(\sim$ | | $q$ | $\vee$ | $r))$ | $\wedge$ | $\sim(q$ | | $\vee(p$ | $\leftrightarrow$ | $\sim$ | $r))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | F | T | T | T | F | F | T | T | T | F | F | T |
| T | T | F | T | F | F | T | F | F | F | F | T | T | T | T | T | F |
| T | F | T | T | T | T | F | T | T | T | T | F | F | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | T | F | T | F | F | F | F | T | T | T | T | F |
| F | T | T | F | T | F | T | T | T | F | F | T | T | F | T | F | T |
| F | T | F | F | T | F | T | F | F | F | F | T | T | F | F | T | F |
| F | F | T | F | T | T | F | T | T | F | F | F | T | F | T | F | T |
| F | F | F | F | T | T | F | T | F | T | T | F | F | F | F | T | F |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 | 5 | 3 | 11 | 10 | 2 | 9 | 1 | 8 | 7 | 3 |

مثال ١٥ : كون جدول الحقيقة للتقرير $\sim p \vee q \leftrightarrow p \rightarrow q$

الحل : التقرير من نوع الشرطية المزدوجة

وجدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى :

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $\sim p \vee q \leftrightarrow p \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T |
| F | T | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T | T |

نلاحظ فى هذا المثال أن قيم الحقيقة للتقرير المركب $\sim p \vee q \leftrightarrow p \rightarrow q$ تكون صواب فى جميع التركيبات الممكنة بالجدول.

مثال ١٦ : كون جدول الحقيقة للتقرير $(p \wedge q) \wedge \sim q$

الحل : التقرير من نوع الفاصلة

وجدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى :

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | F |
| T | F | T | F | F |
| F | T | F | F | F |
| F | F | T | F | F |

نلاحظ فى هذا المثال أن قيم الحقيقة للتقرير المركب $(p \wedge q) \wedge \sim q$ تكون خطأ فى جميع التركيبات الممكنة بالجدول .

# تمارين الفصل الثانى

١ - أوجد نفى كل من التقارير الآتية ثم عين قيمة الحقيقة لكل من التقرير ونفيه:

١ ) المستطيل له أربعة أضلاع .

٢ ) العدد 9 عدد ليس أولى .

٣ ) مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين .

٤ ) العدد $5^2$ اكبر من العدد $2^5$ .

٥ ) $6 + 9 < 14$ .

٦ ) ليس صحيحا أن مجموع زوايا المثلث اكبر من قائمتين .

٧ ) المعادلة $2x + 1 = 0$ ليس لها حل فى مجموعة الأعداد الطبيعية .

٨ ) مجموعة الأعداد الطبيعية تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

٩ ) الحديد يتمدد بالحرارة وينكمش بالبرودة .

١٠ ) مجموع زوايا المثلث اكبر من قائمتين .

٢ - أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

١ ) ليس صحيحا أن العدد $2^9$ عددا زوجيا .

٢ ) القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية أو لندن عاصمة فرنسا .

٣ ) القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية و لندن عاصمة فرنسا .

٤ ) من الخطأ القول إنه إذا كانت القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية فإن لندن عاصمة فرنسا .

٥ ) أهرامات الجيزة وسور الصين العظيم من عجائب الدنيا السبع .

٦ ) ليس صحيحا أن $2 + 3 \neq 4$ أو $5 + 2 = 7$ .

٧ ) إذا كان $2 + 3 = 5$ فإنه ليس صحيحا أن $2^3 = 8$ إذا وفقط إذا كان $3^2 = 9$ .

٨ ) الشرط الضرورى والكاف لكى يكون المثلث متساوى الأضلاع هو أن يكون متساوى الزوايا .

٩ ) مجموع زوايا المثلث اكبر من قائمتين لكن ليس صحيحا أن المعادلة $5x + 3 = 18$ لها حل فى مجموعة الأعداد الطبيعية .

١٠ ) المعادلة $5x + 1 = 18$ ليس لها حل فى مجموعة الأعداد الطبيعية أو فى مجموعة الأعداد النسبية .

٣ - وعد رجل ابنه قائلا :

" سوف احضر لك هدية فقط إذا حصلت على تقدير امتياز فى الامتحان النهائى "

١ ) حصل الابن بالفعل على تقدير امتياز فى الامتحان النهائى ولكن الأب لم يحضر هدية لابنه. هل الأب أوفى بوعده لابنه ؟ وضح لماذا ؟

٢ ) احضر الأب هدية لابنه . هل الابن حقق رغبة أبيه ؟ وضح لماذا ؟

٣ ) لم يحصل الابن على تقدير امتياز فى الامتحان النهائى ولكن الأب احضر هدية لابنه . هل الأب خالف وعده لابنه ؟ وضح لماذا ؟

٤ - أكتب كلا من التقارير الآتية فى صورة " إذا . . . فإن . . . " :

١ ) يقال أن الزاويتان متكاملتان إذا كان مجموع قياسيهما يساوى 180 درجة .

٢ ) الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسيهما 90 درجة .

٣ ) المعادلة $2x + 1 = 0$ ليس لها حل إذا كان $x$ تنتمى فى مجموعة الأعداد الطبيعية.

٤ ) المستقيم العمودى على مستوى يكون عمودى على كل مستقيم فى المستوى .

٥ ) فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين .

٦ ) $x$ عددا زوجيا شرط كافى لكى يكون $x^2$ عددا زوجيا .

٧ ) $x$ عددا زوجيا شرط ضرورى لكى يكون $x^2$ عددا زوجيا .

٨ ) زوايا المثلث تتساوى بشرط تساوى أضلاع المثلث .

٩ ) الشرط الكافى لتساوى أضلاع مثلث هو تساوى زواياه .

١٠ ) الشرط الضرورى لكى يكون $x$ عدد فردى هو أن يكون $x + 1$ عدد زوجى.

١١ ) $x^2$ تقترب من العدد 4 كلما كانت $x$ تقترب من العدد 2 .

١٢ ) بفرض أن $4 > x > 4-$ فينتج أن $|x|<4$ .

١٣ ) يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث وكانت إما زاويتان متبادلتان متساويتين فى القياس أو زاويتان متبادلتان متساويتين فى القياس.

١٤ ) التقرير $p$ خطأ والتقرير $q$ خطأ شرط كاف لكى يكون التقرير المركب $p \vee q$ خطأ .

١٥ ) التقرير المركب $p \wedge q$ يكون صواب فقط إذا كان التقرير $p$ صواب والتقرير $q$ صواب .

٥ - إذا كان $p$ ترمز إلى التقرير " السماء تمطر "

$q$ ترمز إلى التقرير " الشمس ساطعة "

$r$ ترمز إلى التقرير " الرياح عاصفة "

ضع كل من التقارير الآتية فى صورة رمزية ثم كون جدول الحقيقة لكل تقرير :

| | |
|---|---|
| ١ - السماء تمطر لكن الشمس ساطعة . | ٦ - إما الشمس ساطعة أو الرياح عاصفة . |
| ٢ - الشمس ساطعة أو السماء لا تمطر . | ٧ - سطوع الشمس ضرورى لعدم سقوط المطر . |
| ٣ - من الخطاء القول أن الشمس سلطعة أو السماء لا تمطر بينما الريح عاصف. | ٨ - ليس صحيحا أن سطوع الشمس أو عدم وجود رياح عاصفة شرط كافى لعدم سقوط المطر . |
| ٤ - إذا كانت الرياح عاصفة فإن السماء تمطر أو الشمس غير ساطعة. | ٩ - الشمس ليست ساطعة إذا وفقط إذا كانت الرياح عاصفة أو السماء تمطر . |
| ٥ - الشمس ليست ساطعة لكن إذا كانت الرياح عاصفة فإن السماء تمطر . | ١٠ - إذا كانت الرياح العاصفة شرط ضرورى وكافى لسقوط المطر فإن الشمس لن تكون ساطعة. |

٦ - إذا كان $p\ ,\ q$ ترمز إلى تقارير صائبة وكان $r\ ,\ s$ ترمز إلى تقارير خاطئة فأوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

(1) - $p \wedge (q \vee r)$

(2) - $(p \wedge q) \vee r$

(3) - $\sim (p \wedge q)$

(4) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$

(5) - $\sim p \vee q \rightarrow r \wedge s$

(6) - $r \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim s$

(7) - $(\sim p \vee q \rightarrow r) \wedge s$

(8) - $r \leftrightarrow \sim p \veebar q$

(9) - $\sim r \vee p \leftrightarrow p \wedge s \rightarrow \sim q$

(10) - $\sim (r \vee p \leftrightarrow p) \wedge s \rightarrow \sim q$

٧ - نفرض التقارير البسيطة

$p$ : هو مخلص فى عمله

$q$ : هو سـعيد

اكتب كل من التقارير الآتية فى صورة رمزية ثم كون جدول الحقيقة لكل منها:

١ ) هو غير سعيد وكذلك غير مخلص فى عمله .

٢ ) إذا كان غير مخلص فى عمله فإنه لن يكون سعيد .

٣ ) إخلاصه فى عمله شرط ضرورى لكى يكون سعيد .

٤ ) هو مخلص فى عمله إذا وفقط إذا كان سعيد .

٥ ) إما هو غير سعيد أو غير مخلص فى عمله .

٦ ) إخلاصه فى عمله شرط كافى لكى يكون سعيد .

٧ ) هو مخلص فى عمله لكنه غير سعيد .

٨ ) هو مخلص فى عمله فقط عندما يكون سعيد .

٩ ) هو مخلص فى عمله وسعيد .

١٠ ) هو غير سعيد فقط عندما يكون غير مخلص فى عمله .

١١ ) هو سعيد بشرط أن يكون مخلص فى عمله .

١٢ ) الشرط الضرورى لكى يكون سعيد هو أن يكون مخلص فى عمله .

١٣ ) الشرط الضرورى لكى يكون مخلص فى عمله هو أن يكون سعيد .

١٤ ) الشرط الكافى لكى يكون سعيد هو أن يكون مخلص فى عمله .

١٥ ) الشرط الكافى لكى يكون مخلص فى عمله هو أن يكون سعيد .

١٦ ) الشرط الضرورى والكافى لكى يكون سعيد هو أن يكون مخلص فى عمله.

١٧ ) هو غير سعيد لكن إذا اخلص فى عمله فسوف يكون سعيد .

١٨) هو سعيد لكن إذا لم يخلص فى عمله فلن يكون سعيد .

١٩) ليس صحيحا أن عدم إخلاصه فى عمله يؤدى إلى سعادته .

٢٠) إخلاصه فى عمله شرط ضرورى وكافى لكى يكون سعيد .

٨ - نفرض التقارير البسيطة

p : هو مخلص فى عمله

q : هو سعيد

r : هو ناجح فى حياته

اكتب كل من التقارير الآتية فى صورة رمزية ثم كون جدول الحقيقة لكل منها :

١ ) هو مخلص فى عمله فقط عندما يكون سعيد وناجح فى حياته .

٢ ) إذا كان غير مخلص فى عمله فإنه لن يكون سعيد أو ناجح فى حياته .

٣ ) إخلاصه فى عمله شرط ضرورى للسعادة أو النجاح فى الحياة .

٤ ) هو ناجح فى حياته لكن إذا كان غير مخلص فى عمله فإنه لن يكون سعيد .

٥ ) إذا كان إخلاصه فى عمله شرط ضرورى وكافى للنجاح فإنه سوف يكون سعيد.

٦ ) ليس صحيحا أن عدم إخلاصه فى عمله يؤدى إلى سعادته أو نجاحه فى الحياة .

٧ ) - هو غير سعيد لكن إذا اخلص فى عمله فسوف يكون ناجح فى حياته .

٨ ) - الشرط الضرورى لكى يكون سعيد وناجح فى حياته هو أن يكون مخلص فى عمله .

٩ ) - الشرط الكافى لكى يكون سعيد أو ناجح فى حياته هو أن يكون مخلص فى عمله .

١٠ ) - الشرط الضرورى والكافى لكى يكون سعيد وناجح فى حياته هو أن يكون مخلص فى عمله.

٩ - كون جدول الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

(1) - $\sim(p \wedge q)$

(2) - $\sim p \wedge \sim q$

(3) - $\sim p \rightarrow q$

(4) - $p \rightarrow \sim q$

(5) - $p \veebar q \rightarrow \sim p$

(6) - $p \wedge (q \vee r)$

(7) - $(p \wedge q) \vee r$

(8) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$

(9) - $r \leftrightarrow \sim p \veebar q$

(10) - $\sim r \vee p \leftrightarrow p \wedge q \rightarrow \sim q$

١٠ - اكتب كل من التقارير الآتية فى صورة رمزية ثم كون جدول الحقيقة لكل منها :

١ ) من الخطأ القول أن الشباب يجدون فرص عمل جديدة والصحراء من حولنا لا يتم تعميرها .

٢ ) المنطق الرياضى لغة علمية ولا غنى عنها فى الرياضيات .

٣ ) من الخطأ أن نقول ما لا نعنيه أو لا نعنى بما نقوله .

٤ ) المنطق الرياضى هو علم التفكير الدقيق ومن الخطأ أن نقول انه يوجد له قواعد غير واضحة أو لغة علمية غير مفهومة .

٥ ) إذا لم تلتزم بالنظام داخل قاعة الدراسة فإننى سوف أخرجك من القاعة .

٦ ) يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث وكانت إما زاويتان متبادلتان متساويتان فى القياس أو زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس.

٧ ) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين وكل زاويتين متناظرتين متساويتين.

٨ ) يتشابه المثلثان إذا تطابقت زواياهما المتناظرة أو تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة.

٩ ) الشكل الرباعى يكون متوازى أضلاع إذا كان فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين أو كل من قطريه ينصف الآخر.

١٠ ) يتطابق المثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متساوية وكذلك زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس.



الفصل



# التقارير المتكافئة

# Equivalent Statements

## ١ – التكافؤ Equivalence

من دراستنا لجداول الحقيقة فى الفصل الثانى لاحظنا أن التركيبات الممكنة فى جدول الحقيقة لبعض التقارير المركبة يمكن أن تأخذ جميعها القيمة صواب T ، وكذلك لبعض التقارير المركبة، يمكن أن تأخذ جميعها القيمة خطأ F ، والتعاريف الآتية تميز بين مثل هذه الأنواع من التقارير.

**تعريف ١ :** يقال عن تقرير مركب انه صائب منطقيا ( تحصيل حاصل أو حشو tautology) إذا كانت جميع قيم الحقيقة له صائبة، ويقال أنه خاطئ منطقيا (تناقض أو تعارض contradiction) إذا كانت جميع قيم الحقيقة له خاطئة.

والتقارير المركبة لا تنقسم إلى هذين النوعين فقط وإنما هناك تقارير ليست صائبة منطقيا وكذلك ليست خاطئة منطقيا وفى هذه الحالة فإن التركيبات الممكنة فى جدول الحقيقة تحتوى على القيمة صواب T والقيمة خطأ F.

ملاحظة :

إذا كان التقرير المركب A تقرير صائب منطقيا فإن $\sim A$ يكون خاطئ منطقيا

وإذا كان التقرير المركب A تقرير خاطئ منطقيا فإن $\sim A$ يكون صائب منطقيا.

**مثال ١ :** صنف التقارير الآتية من حيث كونها صائبة منطقيا أو خاطئة منطقيا

$$p \vee \sim p \quad , \quad p \wedge \sim p \quad , \quad \sim\sim p$$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقارير المعطاة

| $p$ | $\sim p$ | $\sim\sim p$ | $p \vee \sim p$ | $p \wedge \sim p$ |
|---|---|---|---|---|
| T | F | T | T | F |
| F | T | F | T | F |

يتضح لنا من الجدول أن

- قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $p \vee \sim p$ جميعها صائبة T وبالتالى فإن التقرير $p \vee \sim p$ صائب منطقيا.
- قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $p \wedge \sim p$ جميعها خاطئة F وبالتالى فإن التقرير $p \wedge \sim p$ خاطئ منطقيا.
- قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $\sim\sim p$ تحتوى على القيمة صواب T والقيمة خطأ F وبالتالى فإن التقرير $\sim\sim p$ ليس صائب منطقيا وكذلك ليس خاطئ منطقيا.

مثال ٢ : أثبت أن التقرير $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$ صائب منطقيا.

الحل : جدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \leftrightarrow q$ | $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | F | F | T |
| F | F | F | T | T |

نلاحظ أن قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$ جميعها صائبة T وبالتالى فإن التقرير يكون صائب منطقيا.

مثال ٣ : أثبت أن التقرير $p \wedge \sim (p \vee q)$ خاطئ منطقيا.

الحل : جدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى :

| p | q | $p \vee q$ | $\sim (p \vee q)$ | $p \wedge \sim (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F |
| T | F | T | F | F |
| F | T | T | F | F |
| F | F | F | T | F |

نلاحظ من الجدول أن قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $p \wedge \sim (p \vee q)$ جميعها خاطئة F وبالتالى فإن التقرير يكون خاطئ منطقيا .

تعريف ٢ : يقال أن التقرير A يؤدى إلى التقرير B (وبمعنى آخر التقرير A تضمنا منطقيا للتقرير B) ونرمز لذلك بالرمز $A \Rightarrow B$ إذا كان التقرير $B \rightarrow A$ صائب منطقيا.

مثال ٤ : أثبت أن $p \Rightarrow p \vee \sim p$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $p \rightarrow p \vee \sim p$

| p | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ | $p \rightarrow p \vee \sim p$ |
|---|---|---|---|
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |

نلاحظ من الجدول أن التقرير $p \rightarrow p \vee \sim p$ صائب منطقيا .

وبالتالى من تعريف ( ٢ ) ينتج أن

$$p \Rightarrow p \vee \sim p$$

مثال ٥ : مهما يكن التقريران $q$ , $p$ أثبت أن

1- $p \Rightarrow p \vee q$　　　3- $p \wedge q \Rightarrow q$

2- $p \wedge q \Rightarrow p$　　　4- $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقارير

$$p \to p \vee q \ , \ p \wedge q \to p \ , \ p \wedge q \to q \ , \ p \wedge q \to p \vee q$$

| p | q | p∨q | p∧q | p→p∨q | p∧q→p | p∧q→q | p∧q→p∨q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| F | T | T | F | T | T | T | T |
| F | F | F | F | T | T | T | T |

نلاحظ من الجدول أن جميعها صائب منطقيا وبالتالى ينتج المطلوب.

**ملاحظات**

( ١ ) - إذا كان $B \Leftarrow A$ فإنه بالنظر الى جدول الحقيقة للتقرير $A \to B$ نلاحظ الآتى:

ا - كلما كان التقرير $A$ صائبا فإن التقرير $B$ يكون صائبا أيضا .

ب - كلما كان التقرير $B$ خاطئا فإن التقرير $A$ يكون خاطئا أيضا .

ونعبر أحيانا عن الفقرتين ( ا )، ( ب ) بالقول:

إذا كانت المقدمة $A$ صائبة ، فإن النتيجة $B$ صائبة أيضا ،

وإذا كانت النتيجة $B$ خاطئة ، فإن المقدمة $A$ خاطئة أيضا .

( ٢ ) – $A \Rightarrow B$ ليس له جدول حقيقة، لأن الرمز $\Rightarrow$ لا يمثل أداة ربط بين التقريرين $A , B$ وإنما $A \Rightarrow B$ يعنى أن التقرير $A \rightarrow B$ صائب منطقيا.

( ٣ ) – إذا كان $A \Rightarrow B$ فإننا نعبر عن ذلك بقولنا أن " A شرط كافى لـ B " وهذا يعنى أنه إذا كان التقرير A صائبا، فإنه يكفى ليكون التقرير B صائبا أيضا.

مثال ٦ : أثبت بطريقتين مختلفتين أن $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ .

الحل : الطريقة الأولى : نعلم أنه عندما يكون التقرير $x = 2$ صائبا فإنه يؤدى بالضرورة إلى أن التقرير $x^2 = 4$ صائب، وانه لا يمكن أن يكون $x = 2$ بينما $x^2 \neq 4$ ، وبالتالى فإن $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$ تقرير صائب، أى إن $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ متحقق.

الطريقة الثانية : نعلم أنه عندما يكون التقرير $x^2 = 4$ خاطئا، أى عندما يكون $x^2 \neq 4$ ، فإن التقرير $x = 2$ يكون خاطئا، أى إن $x \neq 2$ ، وبالتالى فإن $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$ تقرير صائب، أى إن $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ متحقق.

تعريف ٣ : يقال أن التقرير A يؤدى إلى التقرير B ، وأن التقرير B يؤدى إلى التقرير A ونرمز لذلك بالرمز $A \Leftrightarrow B$ ، إذا كان التقرير $A \leftrightarrow B$ صائب منطقيا.

$A \Leftrightarrow B$ ليس له جدول حقيقة لأن الرمز $\Leftrightarrow$ لا يمثل أداة ربط بين التقريرين $A , B$ وإنما $A \Leftrightarrow B$ يعنى أن التقرير $A \leftrightarrow B$ صائب منطقيا، ونعبر أحيانا عن الرمز $\Leftrightarrow$ بقولنا

"الشرط اللازم والكافى" كما انه يعنى أيضا كلمة يكافئ.

تعريف ٤ : يقال عن تقريرين $A , B$ إنهما متكافئان منطقيا أو اختصارا، متكافئان إذا كـــان لكل منهما نفس قيم الحقيقة بالجدول ويرمز لذلك $A \equiv B$ (ويقـــرأ $A$ يكـــافئ $B$).

وأحيانا يستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ بدلا من الرمز $\equiv$ للدلالة علـــى تكـــافؤ تقريرين وبالتالى فإنه يمكن إثبات التكافؤ بين تقريرين $A , B$ عن طريـــق تكوين جدول الحقيقة لكل من التقريرين وملاحظة التطابق بـــين قيـــم الحقيقة للتقريرين أو عن طريق إثبات أن $A \Leftrightarrow B$ أى إثبـــات أن التقرير $A \leftrightarrow B$ صائب منطقيا.

مثال ٧ : جدول الحقيقة التالى يثبت أن التقريرين $\sim p \vee q$ , $p \to q$ متكافئان منطقيا

| p | q | ~ p | p → q | ~ p ∨ q |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |
| | | | ↑ | ↑ |

حيث نلاحظ أن قيم الحقيقة فى العمود الرابع المناظر للتقرير $p \to q$ هى نفسها قيم الحقيقـــة فى العمود الخامس المناظر للتقرير $\sim p \vee q$ أى إن $p \to q \equiv \sim p \vee q$ .

ويمكن إثبات التكافؤ بين التقريرين عن طريق إثبات أن

$$p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

أى إثبات أن التقرير $p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$ صائب منطقيا وهذا يتضح من الجدول الآتى:

| p | q | $\sim p$ | $p \to q$ | $\sim p \vee q$ | $p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T |
| F | T | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T | T |

مثال ٨ : جدول الحقيقة التالى يثبت أن التقريرين $p \wedge \sim q$ , $\sim(p \to q)$ متكافئان منطقيا.

| p | q | $\sim q$ | $\sim(p \to q)$ | $p \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F |
| T | F | T | T | T |
| F | T | F | F | F |
| F | F | T | F | F |

$\uparrow \qquad \uparrow$

اى إن $\quad \sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

## ٢ – قانون ديمورجان De Morgan's law

عندما يكون لدينا تقرير مركب ما فإنه يمكن فى بعض الأحيان أن نستنتج تقرير آخر يكافئه ويتم ذلك بواسطة قاعدة تسمى قانون ديمورجان وللتعرف على هذه القاعدة نفرض التقريران

p : الجو بارد

q : السماء تمطر

أذن التقرير المركب "الجو ليس بارد والسماء لا تمطر" يمكن كتابته فى الصورة الرمزية

$\sim p \wedge \sim q$

والآن نفرض التقرير "من الخطأ القول أن الجو بارد أو السماء تمطر" و يمكن كتابته فى الصورة الرمزية $\sim(p \vee q)$ وبتكوين جدول الحقيقة للتقريرين $\sim p \wedge \sim q$ , $\sim(p \vee q)$

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | F | F |
| T | F | F | T | T | F | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | T | T | F | T | T |

↑ ↑

أذن $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

وبالمثل يمكن إثبات أن $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

والآن وبوجه عام إذا كان لدينا تقرير مركب بشرط أن يكون

- من نوع الوصلة أو الفاصلة

أو

- من نوع النفى لوصلة أو النفى لفاصلة

فإنه بواسطة قانون ديمورجان يمكن إيجاد تقرير مكافئ ويتم ذلك وفقا للخطـــوات الثـــلاث الآتية:

<u>الخطوة الأولى</u> : نفى التقرير المعطى بالكامل .

<u>الخطوة الثانية</u> : نفى التقارير المكونة لجزئي الوصل أو الفصل .

<u>الخطوة الثالثة</u> : تغيير أداة الوصل $\wedge$ إلى أداة الفصل $\vee$ .

أو تغيير أداة الفصل $\vee$ إلى أداة الوصل $\wedge$ .

مثال ٩ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير $p \wedge q$

الحل : التقرير المعطى من نوع الوصلة

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على $\sim(p \wedge q)$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الوصل فنحصل على $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الوصل $\wedge$ إلى أداة الفصل $\vee$ فنحصل على $\sim(\sim p \vee \sim q)$

إذن $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$

مثال ١٠ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير $\sim(\sim p \vee q)$

الحل : التقرير المعطى من نوع النفى لفاصلة

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على $\sim\sim(\sim p \vee q)$

وحيث أن $\sim\sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $\sim p \vee q$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الفاصلة فنحصل على $\sim\sim p \vee \sim q$

وحيث أن $\sim\sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $p \vee \sim q$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الفصل $\vee$ إلى أداة الوصل $\wedge$ فنحصل على $p \wedge \sim q$

إذن $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

مثال ١١ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير
$\sim(p \vee (q \rightarrow r))$

الحل : التقرير المعطى من نوع النفى لفاصلة

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على

$$\sim\sim(p \vee (q \rightarrow r))$$

وحيث أن $\sim\sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $p \vee (q \rightarrow r)$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الفاصلة فنحصل على $\sim p \vee \sim ( q \rightarrow r ) \sim$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الفصل $\vee$ إلى أداة الوصل $\wedge$ فنحصل على

$$\sim p \wedge \sim ( q \rightarrow r )$$

أذن $\sim ( p \vee ( q \rightarrow r ) ) \equiv \sim p \wedge \sim ( q \rightarrow r )$

وحيث أن $\sim ( q \rightarrow r ) \equiv q \wedge \sim r$ أذن

$$\sim ( p \vee ( q \rightarrow r ) ) \equiv \sim p \wedge ( q \wedge \sim r )$$

**مثال ١٢** : استخدم قانون ديمورجان لكتابة تقرير يكافئ التقرير

" ليس صحيحا أن الجو بارد والسماء غير مشرقة "

**الحل** : نفرض أن $p$ : الجو بارد

$q$ : السماء مشرقة

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim ( p \wedge \sim q )$ وهو من نوع النفى لواصلة وبتطبيق قانون ديمورجان لإيجاد تقرير مكافئ

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على $\sim \sim ( p \wedge \sim q )$

وحيث أن $\sim \sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $p \wedge \sim q$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الواصلة فنحصل على $\sim p \wedge \sim \sim q$

وحيث أن $\sim \sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $\sim p \wedge q$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الوصل $\wedge$ إلى أداة الفصل $\vee$ فنحصل على $\sim p \vee q$

أذن $\sim ( p \wedge \sim q ) \equiv \sim p \vee q$ .

أذن التقرير المعطى " ليس صحيحا أن الجو بارد والسماء غير مشرقة "

يمكن كتابته فى الصورة المكافئة " الجو ليس بارد أو السماء مشرقة "

من الأمثلة المشهورة لقانون ديمورجان

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

مثال ١٣ : استخدم قانون ديمورجان لإثبات أن $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

الحل : حيث أن $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ أذن بتطبيق قانون ديمورجان

$$\begin{aligned} \sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q \\ &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

مثال ١٤ : استخدم التكافؤ

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

فى إعادة صياغة كل من التقارير الآتية :

١ – إذا كان اليوم هو الثلاثاء فإن غدا يكون الأربعاء .

٢ – إذا لم تسلك سلوكا حسنا فإننى سوف أعاقبك .

الحل :

١ – نفرض أن $p$ : اليوم هو الثلاثاء

$q$ : غدا يكون الأربعاء

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $p \rightarrow q$ وهو من نوع الشرطية، وحيث أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

أذن التقرير المعطى

" إذا كان اليوم هو الثلاثاء فإن غدا يكون الأربعاء "

يمكن كتابته فى الصورة المكافئة

" اليوم ليس الثلاثاء أو غدا يكون الأربعاء "

٢ - نفرض أن $p$ : اسلك سلوكا حسنا

$q$ : سوف أعاقبك

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim p \rightarrow q$ وهو من نوع الشرطية، وحيث أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

أذن

$$\sim p \rightarrow q \equiv \sim\sim p \vee q \equiv p \vee q$$

أذن التقرير المعطى

" إذا لم تسلك سلوكا حسنا فإننى سوف أعاقبك"

يمكن كتابته فى الصورة المكافئة

" اسلك سلوكا حسنا أو سأعاقبك"

مثال ١٥ : بسـط كل من العبارات الآتية :

١ - ليس صحيحا أن الورد احمر تعنى أن البنفسج أزرق .

٢ - ليس من الحقيقى انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة .

الحل :

١ - نفرض أن $p$ : الورد احمر

$q$ : البنفسج أزرق

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim(p \rightarrow q)$ وحيث أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن التقرير المعطى

" ليس صحيحا أن الورد احمر تعنى أن البنفسج أزرق "

يمكن كتابته فى الصورة البسيطة

" الورد احمر والبنفسج ليس أزرق "

٢ – نفرض أن $p$ : السماء تمطر

$q$ : الشمس مشرقة

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim(\sim p \to q)$ وحيث أن

$$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن

$$\sim(\sim p \to q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

أذن التقرير المعطى

" ليس من الحقيقى انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة "

يمكن كتابته فى الصورة البسيطة

"السماء لا تمطر والشمس ليست مشرقة"

فى الجدول الآتى نعرض قائمة من التقارير المتكافئة منطقيا، تسمى جبر التقارير، ويمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الحقيقة.

| القانون | التقارير المتكافئة منطقيا |
|---|---|
| قوانين اللاغو<br>**Idempotent Laws** | $p \vee p \equiv p$<br>$p \wedge p \equiv p$ |
| قوانين الإبدال<br>**Commutative Laws** | $p \vee q \equiv q \vee p$<br>$p \wedge q \equiv q \wedge p$ |

| التقارير المتكافئة منطقيا | القانون |
|---|---|
| $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | قوانين الدمج<br>**Associative Laws** |
| $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | قوانين التوزيع<br>**Distributive Laws** |
| $p \vee f \equiv p$ , $p \wedge t \equiv p$<br>$p \vee t \equiv t$ , $p \wedge f \equiv f$<br>حيث t ترمز إلى تقرير صائب منطقيا<br>بينما f ترمز إلى تقرير خاطئ منطقيا | قوانين الوحدة<br>**Identity Laws** |
| $p \vee \sim p \equiv t$ , $p \wedge \sim p \equiv f$<br>$\sim t \equiv f$ , $\sim f \equiv t$<br>$\sim \sim p \equiv p$ | قوانين المكملة<br>**Complement Laws** |
| $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$<br>$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ | قوانين ديمورجان<br>**De Morgan's Laws** |

وباستخدام قوانين جبر التقارير الواردة فى الجدول السابق يمكن تبسيط التقارير وكذلك إثبات تكافؤها دون الرجوع الى جداول الحقيقة كما هو موضح بالأمثلة الآتية :

مثال ١٦ : استخدم قوانين جبر التقارير فى تبسيط كل من التقارير الآتية :

1 - $(p \vee q) \wedge \sim p$

2 - $p \vee (p \wedge q)$

3 - $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

الحل :

| | |
|---|---|
| قانون الإبدال | $1-\quad (p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge (p \vee q)$ |
| قانون التوزيع | $\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$ |
| قانون المكملة | $\equiv f \vee (\sim p \wedge q)$ |
| قانون الوحدة | $\equiv \sim p \wedge q$ |

أذن

$$(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$$

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة | $2-\quad p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q)$ |
| قانون التوزيع | $\equiv p \wedge (t \vee q)$ |
| قانون الوحدة | $\equiv p \wedge t$ |
| قانون الوحدة | $\equiv p$ |

أذن

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

| | |
|---|---|
| قانون ديمورجان | $3- \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ |
| قانون التوزيع | $\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q)$ |
| قانون المكملة | $\equiv \sim p \wedge t$ |
| قانون الوحدة | $\equiv \sim p$ |

أذن

$$\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

## ٣ – تقارير شرطية أخرى More Conditional Statements

فى دراستنا للرياضيات كثيرا ما يقابلنا قواعد و نظريات موضوعة فى صورة تقارير شرطية، فمثلا النظرية.

" إذا تساوى ضلعان فى مثلث فإن الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع تتساوى "

موضوعة فى صورة شرطية، وسوف نناقش الآن وبالتفصيل التقارير الشرطية بصورها المختلفة:

نفرض أننا أعطينا تقريرين $p$ , $q$ والسؤال الآن

"ما هى التقارير الشرطية التى يمكن تكوينها باستخدام التقارير $\sim q$ , $\sim p$ , $q$ , $p$ ؟"

والقائمة الآتية تحتوى على التقارير الشرطية الممكنة وأسماءها

| | | |
|---|---|---|
| التقرير الشرطى | | $p \rightarrow q$ |
| عكس التقرير الشرطى | Converse | $q \rightarrow p$ |
| مقلوب التقرير الشرطى | Inverse | $\sim p \rightarrow \sim q$ |
| مضاد التقرير الشرطى | Contrapositive | $\sim q \rightarrow \sim p$ |

تعريف ٥ : عكس التقرير الشرطى Converse

عكس التقرير الشرطى $p \rightarrow q$ هو التقرير الشرطى $q \rightarrow p$

ويجب ملاحظة أن نفى التقرير شىء وعكسه شىء آخر.

مثال ١٧ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية وعكس كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير وعكسه .

| التقرير الشرطى | | عكس التقرير الشرطى | |
|---|---|---|---|
| $p \rightarrow q$ | قيمة الحقيقة | $q \rightarrow p$ | قيمة الحقيقة |
| إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين . | صواب T | إذا كان المثلث متساوى الساقين فإنه يكون متساوى الأضلاع . | خطأ F |
| إذا تساوى ضلعان فى مثلث فإن الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع تتساوى. | صواب T | إذا تساوت زاويتان فى مثلث فإن الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تتساوى. | صواب T |
| إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى أيضا . | خطأ F | إذا كان 5 + 5 عدد فردى فإن 5 يكون عدد فردى أيضا. | صواب T |

من هذا المثال نلاحظ الحقيقة الآتية :

**صحة التقرير الشرطى لا تؤدى بالضرورة الى صحة عكسه، فالتقرير الشرطى قد يكون صواب ورغم ذلك فإن عكسه يكون أما صواب وأما خطأ بينما إذا كان التقرير الشرطى خطأ فإن عكسه لابد أن يكون صواب.**

وفى الجدول الآتى نوضح قيم الحقيقة للتقرير $p \rightarrow q$ وعكسه

| p | q | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | T | F |
| F | F | T | T |

ونلاحظ من الجدول أن التقرير $p \rightarrow q$ لا يكافئ التقرير $q \rightarrow p$ ، أى إن التقريـر لا يكافئ عكسه.

تعريف ٦ : مقلوب التقرير الشرطى Inverse

مقلوب التقرير الشرطى $p \rightarrow q$ هو التقرير الشرطى $\sim p \rightarrow \sim q$

مثال ١٨ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية و مقلوب كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير و مقلوبه.

| التقرير الشرطى | | مقلوب التقرير الشرطى | |
|---|---|---|---|
| $p \rightarrow q$ | قيمة الحقيقة | $\sim p \rightarrow \sim q$ | قيمة الحقيقة |
| إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا . | صواب T | إذا كان المثلث غير متساوى الأضلاع فإنه يكون غير متساوى الزوايا . | صواب T |
| إذا كان 3 عدد زوجي فإن 3+3 يكون عدد زوجي . | صواب T | إذا كان 3 عدد ليس زوجي فإن 3+3 يكون عدد ليس زوجي أيضا . | خطأ F |
| إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى . | خطأ F | إذا كان 5 عدد ليس فردى فإن 5+5 يكون عدد ليس فردى أيضا . | صواب T |

والجدول الآتى نوضح فيه قيم الحقيقة للتقرير $p \rightarrow q$ ومقلوبه

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \rightarrow q$ | $\sim p \rightarrow \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | F | T |
| F | T | T | F | T | F |
| F | F | T | T | T | T |

ونلاحظ من الجدول أن التقرير $p \rightarrow q$ لا يكافئ التقريـــر $\sim p \rightarrow \sim q$ ، أى إن التقرير لا يكافئ مقلوبه .

تعريف ٧ : مضاد التقرير الشرطى $p \rightarrow q$

مضاد التقرير الشرطى $p \rightarrow q$ هو التقرير الشرطى $\sim q \rightarrow \sim p$

أى إن مضاد التقرير الشرطى هو مقلوب عكس التقرير.

مثال ١٩ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية و مضاد كل منها وكذلك نوضـــح قيم الحقيقة للتقرير ومضاده.

| التقرير الشرطى | | مضاد التقرير الشرطى | |
|---|---|---|---|
| $p \rightarrow q$ | قيمة الحقيقة | $\sim q \rightarrow \sim p$ | قيمة الحقيقة |
| إذا كـــان المثلـــث متســـــاوى الأضلاع فإنه يكون متســـــاوى الساقين . | صواب T | إذا كان المثلث غـــير متســـاوى الساقين فإنه يكون غير متسـلوى الأضلاع . | صواب T |
| إذا كان 3 عدد زوجى فـــإن 3+3 يكون عدد زوجى . | صواب T | إذا كان 3+3 عدد ليس زوجـــى فإن 3 يكون عدد ليس زوجـــى أيضا. | صواب T |
| إذا كان 5 عدد فـــردى فـــإن 5+5 يكون عدد فردى . | خطأ F | إذا كان 5+5 عدد ليس فـــردى فإن 5 يكون عدد ليس فردى. | صواب F |

والجدول الآتى نوضح فيه قيم الحقيقة للتقرير $p \to q$ ومضاده

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \to q$ | $\sim q \to \sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T |
| F | F | T | T | T | T |

↑ ↑

ونلاحظ من الجدول أن

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$$

أى إن التقرير يكافئ مضاده، وبالتالى فإنه يمكن إثبات صحة تقرير ما عن طريق إثبات صحة مضاده ، وهذه طريقة معروفة للبرهان تسمى بالبرهان الغير مباشر، وسوف نتناول بالتفصيل طرق البرهان فى الفصل السادس.

وفى الجدول الآتى نضع قيم الحقيقة للتقارير

$$p \to q \quad , \quad q \to p \quad , \quad \sim p \to \sim q$$
$$\sim q \to \sim p \quad , \quad \sim(p \to q)$$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $\sim p \to \sim q$ | $\sim q \to \sim p$ | $\sim(p \to q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | T | T | T | F |
| T | F | F | T | F | T | T | F | T |
| F | T | T | F | T | F | F | T | F |
| F | F | T | T | T | T | T | T | F |

من الجدول نلاحظ ما يأتى :

١ - $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

٢ - $q \to p \equiv \sim p \to \sim q$

٣ - نفى التقرير يختلف تماما عن عكس التقرير أو مقلوب التقرير أو مضاد التقرير.

مثال ٢٠ : نظرية فيثاغورث تنص على الآتى:

"فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طـــولى الضلعــين الآخرين."

١ - اكتب عكس نظرية فيثاغورث .

٢ - اكتب مقلوب نظرية فيثاغورث .

٣ - اكتب مضاد نظرية فيثاغورث .

الحل : يمكن صياغة نظرية فيثاغورث على صورة الشرطية :

"إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوى مجمـــوع مربعـى طــولى الضلعين الآخرين."

نفرض التقرير

$p$ : المثلث قائم الزاوية

$q$ : مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين

أذن نظرية فيثاغورث تكون على الصورة الرمزية $p \to q$ .

١ - عكس نظرية فيثاغورث

حيث أن عكس التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $q \to p$ ، أذن عكس نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فـــإن المثلث يكون قائم الزاوية."

**٢ – مقلوب نظرية فيثاغورث**

حيث أن مقلوب التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $\sim p \to \sim q$ ، أذن مقلوب نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين."

**٣ – مضاد نظرية فيثاغورث**

حيث أن مضاد التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $\sim q \to \sim p$ ، أذن مضاد نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان مربع طول الوتر فى مثلث لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث لا يكونقائم الزاوية."

**مثال ٢١** : اكتب عكس ومقلوب ومضاد التقرير الآتى:

" $x$ عددا زوجيا شرط كافى لكى يكون $x^2$ عددا زوجيا."

**الحل :**

التقرير يمكن كتابته فى الصورة

"إذا كان $x$ عددا زوجيا فإن $x^2$ عددا زوجيا."

نفرض التقارير

$p$ : $x$ عددا زوجيا

$q$ : $x^2$ عددا زوجيا

أذن التقرير يمكن كتابته على الصورة الرمزية $p \to q$

عكس التقرير

حيث أن عكس التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $q \to p$، أذن عكس التقرير يكون

"إذا كان $x^2$ عددا زوجيا فإن $x$ عددا زوجيا."

مقلوب التقرير

حيث أن مقلوب التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $\sim p \to \sim q$ ، أذن مقلوب التقرير يكون

"إذا كان $x$ عددا غير زوجيا فإن $x^2$ عددا غير زوجيا."

مضاد التقرير

حيث أن مضاد التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $\sim q \to \sim p$ ، أذن مضاد التقرير يكون

" إذا كان $x^2$ عددا غير زوجيا فإن $x$ عددا غير زوجيا."

## ٤ – جبر الافتراضات

نعلم أن الافتراض يرمز له $P(p, q, \ldots)$ وهو كثيرة حدود بولية فى المتغيرات $p, q, \ldots$ وهذه المتغيرات تمثل تقارير غير محددة وبعبارة أخرى فإن الافتراض يمثل تقرير مركب ولذلك فإنه يمكننا إعادة صياغة التعاريف السابقة من هذا الفصل على الافتراض $P(p, q, \ldots)$.

تعريف ٨ : الافتراض $P(p, q, \ldots)$ يقال أنه صائب منطقيا ( تحصيل حاصل أو حشو tautology ) إذا كان $P(p_0, q_0, \ldots)$ له قيمة الحقيقة صواب ويقال أنه خاطئ منطقيا ( تناقض أو تعارض contradiction ) إذا كان $P(p_0, q_0, \ldots)$ له قيمة الحقيقة خطأ لأى تقارير $p_0, q_0, \ldots$ تحل مكان $p, q, \ldots$.

مثال ٢٢: الافتراض $P(p) = p \vee \sim p$ صائب منطقيا والافتراض $Q(p) = p \wedge \sim p$ خاطئ منطقيا كما وضحنا فى مثال (١).

مثال ٢٣ : الافتراض $P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ صائب منطقيا والافتراض $Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$ خاطئ منطقيا كما وضحنا فى مثال (٢)، (٣).

مثال ٢٤ : ( قانون القياس المنطقى )

الافتراض $P(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ صائب منطقيا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة الآتى :

| p | q | r | ( p | → | q ) | ∧ | ( q | → | r ) | → | ( p | → | r ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | F | T | F | F | T | T | F | F |
| T | F | T | T | F | F | F | F | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F | F | F | T | F | T | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T | T | T | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | F | T | T | F | T | F | F | T | F | T | F |
| F | F | T | F | T | F | T | F | T | T | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T | F | T | F | T | F | T | F | T | F |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 7 | 2 | 5 | 3 | 8 | 1 | 6 | 3 |

ومن الجدول بالعمود فى الخطوة 8 يتضح أن الافتراض $P(p,q,r)$ صائب منطقيا.

من الأمثلة السابقة وحيث أن الافتراض الصائب منطقيا يكون دائما صواب والافتراض الخاطئ منطقيا يكون دائما خطأ فإننا نلاحظ أن نفى الافتراض الصائب منطقيا يكون افتراض خاطئ منطقيا والعكس صحيح.

ملاحظة :

إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots)$ صائب منطقيا فإن الافتراض $\sim P(p,q,\dots)$ يكون خاطئ منطقيا والعكس صحيح.

فى مثال ( ٢٣ ) الافتراض

$$P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

صائب منطقيا وبالتالى فإن الافتراض $\sim P(p,q)$ يكون خاطئ منطقيا وبالمثل الافتراض

$$Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$$

خاطئ منطقيا وبالتالى فإن الافتراض $\sim Q(p,q)$ يكون صائب منطقيا.

## نظرية ١ : مفهوم الإحلال

١ – إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots)$ صائب منطقيا فإن $P(p_0, q_0, \dots)$ يكون أيضا صائب منطقيا لأى تقارير $p_0, q_0, \dots$ تحل مكان $p, q, \dots$.

٢ – إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots)$ خاطئ منطقيا فإن $P(p_0, q_0, \dots)$ يكون أيضا خاطئ منطقيا لأى تقارير $p_0, q_0, \dots$ تحل مكان $p, q, \dots$.

مثال ٢٥ : كما وضحنا بمثال ( ٢٣ ) فإن الافتراض $P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ صائب منطقيا والافتراض $Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$ خاطئ منطقيا

والآن نفرض التقارير

$p_0$ : الجو بارد

$q_0$ : الشمس مشرقة

أذن وفقا لمفهوم الإحلال فإن الافتراض $P(p_0,q_0) = (p_0 \wedge q_0) \rightarrow (p_0 \leftrightarrow q_0)$ يكون صائب منطقيا وبالمثل الافتراض $Q(p_0,q_0) = p_0 \wedge \sim (p_0 \vee q_0)$ يكون خاطئ منطقيا.

تعريف ٩ : يقال أن الافتراض $P(p,q,\dots)$ يؤدى إلى الافتراض $Q(p,q,\dots)$ (وبمعنى آخر الافتراض $P(p,q,\dots)$ تضمنا منطقيا للافتراض $Q(p,q,\dots)$) ونرمز لذلك بالرمز $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$ إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots) \rightarrow Q(p,q,\dots)$ صائب منطقيا.

مثال ٢٦ : للافتراضين

$$P(p,q) = p \wedge q \qquad , \qquad Q(p,q) = p \vee q$$

أثبت أن $P(p,q) \Rightarrow Q(p,q)$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للافتراض $P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T |
| F | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T |

ومن الجدول نلاحظ أن الافتراض $P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$ صائب منطقيا، وبالتالى ينتج أن التضمين $P(p,q) \Rightarrow Q(p,q)$ متحقق.

تعريف ١٠ : يقال أن الافتراض $P(p,q,\dots)$ يؤدى إلى الافتراض $Q(p,q,\dots)$ ، وان الافتراض $Q(p,q,\dots)$ يؤدى إلى الافتراض $P(p,q,\dots)$ ونرمز لذلك بالرمز $P(p,q,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,\dots)$ إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,\dots)$ صائب منطقيا.

تعريف ١١ : الافتراضيان $Q(p, q, ...)$ , $P(p, q, ...)$ يسميان متكافئان منطقيا أو اختصارا متكافئان إذا كان لكل منهما نفس قيم الحقيقة بالجدول ويرمز لذلك

$$P(p,q, ...) \equiv Q(p,q, ...)$$

ويستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ أحيانا بدلا من الرمز $\equiv$ للدلالة على تكافؤ الافتراضيان.

مثال ٢٧ : الافتراضيان

$$P(p,q) = p \leftrightarrow q$$
$$Q(p,q) = (p \to q) \wedge (q \to p)$$

متكافئان منطقيا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة لكل افتراض

| p | q | $p \to q$ | $q \to p$ | P(p,q) | Q(p,q) |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

ومن الجدول يتضح أن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$

نظرية ٢ : $P(p,q, ...) \equiv Q(p,q, ...)$ إذا وفقط إذا كان الافتراض

$$P(p,q, ...) \leftrightarrow Q(p,q, ...)$$

صائب منطقيا .

نظرية ٣ : العلاقة بين الافتراضيان $Q(p, q, ...)$ , $P(p, q, ...)$ المعرفة بالصورة

$$P(p,q, ...) \equiv Q(p,q, ...)$$

هى علاقة تكافؤ أى إنها

**١ - علاقة عاكسة :**

لكل افتراض $P(p, q, \ldots)$ فإن $P(p,q,\ldots) \equiv P(p,q,\ldots)$

**٢ - علاقة متماثلة :**

إذا كـــــــان $P(p,q,\ldots) \equiv Q(p,q,\ldots)$ فـــــــإن

$Q(p,q,\ldots) \equiv P(p,q,\ldots)$

**٣ - علاقة ناقلة :**

إذا كان $P(p,q,\ldots) \equiv Q(p,q,\ldots)$

وكان $Q(p,q,\ldots) \equiv R(p,q,\ldots)$

فإن $P(p,q,\ldots) \equiv R(p,q,\ldots)$

مثال ٢٨ : الافتراضيان

$$P(p,q) = p \leftrightarrow q$$
$$Q(p,q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئان منطقيا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة للافتراض

$$P(p,q) \leftrightarrow Q(p,q)$$

| p | q | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | P(p,q) | Q(p,q) | $P(p,q) \leftrightarrow Q(p,q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | F | F | T |
| F | F | T | T | T | T | T |

أذن الافـــــتراض $P(p,q) \leftrightarrow Q(p,q)$ صـــــائب منطقيـــــــا، أى إن $P(p,q) \Leftrightarrow Q(p,q)$ وبالتالى ينتج أن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$.

نظرية ٤ : إذا كان الافتراضيان $Q(p, q, \dots)$ , $P(p, q, \dots)$ كل منهم صائب منطقيا أو كل منهم خاطئ منطقيا فإن

$$P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$$

مثال ٢٩ : الافتراضيان

$$P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$
$$Q(p,q) = \sim p \vee (p \vee q)$$

كل منهم صائب منطقيا وبالتالى فإن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$ .

مثال ٣٠ : الافتراضيان

$$P(p,q) = (p \wedge q) \wedge \sim (p \leftrightarrow q)$$
$$Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$$

كل منهم خاطئ منطقيا وبالتالى فإن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$ .

ووفقا لمفهوم الإحلال فإنه يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية ٥ : إذا كان $P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$ فإن $P(p_0,q_0,\dots) \equiv Q(p_0,q_0,\dots)$ لأى تقارير ... , $p_0 , q_0$ تحل مكان ... , $p , q$ .

مثال ٣١ : الافتراضيان

$$P(p,q) = p \leftrightarrow q \quad , \quad Q(p,q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئان منطقيا، أى إن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$ ( من مثال (٢٨)). والآن نفرض التقارير

$p_0$ : الجو بارد

$q_0$ : الشمس مشرقة

أذن وفقا لمفهوم الإحلال فإن $P(p_0 , q_0) = Q(p_0 , q_0)$ .

ووفقا لمفهوم الإحلال ونظرية ( ٥ ) فإنه يمكن أعاده صياغة قوانين جبر التقارير ليحل محلها قوانين جبر الافتراضات.

نظرية ٦ : لأى افتراضيان $Q(p,q,\ldots)$ , $P(p,q,\ldots)$ فإن الشروط الثلاثة الآتية تكون متكافئة :

١ - الافتراض $P(p,q,\ldots) \rightarrow Q(p,q,\ldots)$ صائب منطقيا .

٢ - الافتراض $\sim P(p,q,\ldots) \vee Q(p,q,\ldots)$ صائب منطقيا .

٣ - الافتراض $P(p,q,\ldots) \wedge \sim Q(p,q,\ldots)$ خاطئ منطقيا .

مثال ٣٢ : نفرض $Q(p,q) = p \leftrightarrow q$ , $P(p,q) = p \wedge q$
وكما وضحنا بمثال ( ٢ ) فإن الافتراض $P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$ يكون صائب منطقيا ومن نظرية ( ٦ ) نستنتج أن الافتراض $\sim(p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow q)$ يكون صائب منطقيا وكذلك الافتراض $(p \wedge q) \wedge \sim(p \leftrightarrow q)$ يكون خاطئ منطقيا.

ملاحظة :

يقال أن الافتراض $P(p,q,\ldots)$ يؤدى إلى الافتراض $Q(p,q,\ldots)$ (وبمعنى آخر الافتراض $P(p,q,\ldots)$ تضمنا منطقيا للافتراض $Q(p,q,\ldots)$ ) ونرمز لذلك بالرمز $P(p,q,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,\ldots)$ إذا تحققت أحد شروط نظرية (٦).

مثال ٣٣ : أثبت أن $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

الحل : باستخدام نظرية ( ٦ ) يمكن الإثبات بثلاث طرق

الطريقة الأولى : إثبات أن الافتراض $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ صائب منطقيا وهـذا واضح من جدول الحقيقة الآتى :

| p | q | p∨q | p∧q | p∧q→p∨q |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T |
| F | T | T | F | T |
| F | F | F | F | T |

الطريقة الثانية : إثبات أن الافتراض $\sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ صائب منطقيا وهـذا واضح من جدول الحقيقة الآتى :

| p | q | p∨q | p∧q | ~(p∧q) | ~(p∧q)∨(p∨q) |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | T |
| T | F | T | F | T | T |
| F | T | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T | T |

الطريقة الثالثة : إثبات أن الافتراض $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ خاطئ منطقيا وهذا واضح من جدول الحقيقة الآتى :

| p | q | p∨q | p∧q | ~(p∨q) | (p∧q)∧~(p∨q) |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | F |
| T | F | T | F | F | F |
| F | T | T | F | F | F |
| F | F | F | F | T | F |

نظرية ٧ : العلاقة بين الافتراضيان $Q(p, q, ...)$ , $P(p, q, ...)$ المعرفة بالصورة

$$P(p,q, ...) \Rightarrow Q(p,q, ...)$$

هى علاقة ترتيب جزئى أى إنها

١ - علاقة عاكسة :

لكل افتراض $P(p, q, ...)$ فإن

$$P(p,q, ...) \Rightarrow P(p,q, ...)$$

٢ - علاقة غير متماثلة :

إذا كان $P(p,q, ...) \Rightarrow Q(p,q, ...)$

وكان $Q(p,q, ...) \Rightarrow P(p,q, ...)$

فإن $Q(p,q, ...) \equiv P(p,q, ...)$

٣ - علاقة ناقلة :

إذا كان $P(p,q, ...) \Rightarrow Q(p,q, ...)$

وكان $Q(p,q, ...) \Rightarrow R(p,q, ...)$

فإن $P(p,q, ...) \Rightarrow R(p,q, ...)$

نظرية ٨ : إذا كان $P(p,q, ...) \Rightarrow Q(p,q, ...)$ فإن

$$P(p_0,q_0, ...) \Rightarrow Q(p_0,q_0, ...)$$

لأى تقارير $p_0, q_0, ...$ تحل مكان $p, q, ...$ .

البرهان : حيث أن $P(p,q, ...) \Rightarrow Q(p,q, ...)$ أذن من التعريف ينتج أن الافتراض $P(p,q, ...) \rightarrow Q(p,q, ...)$ يكون صائب منطقيا ومن مفهوم الإحـــلال

(نظرية ١) أذن الافتراض $P(p_0,q_0,\dots)\rightarrow Q(p_0,q_0,\dots)$ يكون أيضـــا صائب منطقيا لأى تقارير $p_0 , q_0 , \dots$ تحل مكان $p , q , \dots$ وبالتـــالى ينتـــج المطلوب

$$P(p_0,q_0,\dots)\Rightarrow Q(p_0,q_0,\dots)$$

مثال ٣٤ : فى مثال ( ٣٣ ) أثبتنا أن

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

والآن نفرض التقارير

$p_0$ : مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين

$q_0$ : مجموع عددين زوجيين يكون عدد زوجى

أذن من نظرية ( ٨ ) فإن

$$p_0 \wedge q_0 \Rightarrow p_0 \vee q_0 .$$

ملاحظة :

لأى افتراضيان $Q(p_0,q_0,\dots)$ , $P(p_0,q_0,\dots)$ فإن

$$P(p_0,q_0,\dots)\wedge Q(p_0,q_0,\dots) \Rightarrow P(p_0,q_0,\dots)\vee Q(p_0,q_0,\dots)$$

مثال ٣٥ : أثبت أنه لأى افتراض $P(p,q,\dots)$ فإن

$$p \Rightarrow p \vee P(p,q,\dots)$$

الحل : حيث أن $p \Rightarrow p \vee q$ ( من مثال ( ٥ ) )

أذن من نظرية ( ٨ ) فإن الافتراض $P(p,q,\dots)$ يمكن أن يحل مكان q .

أى إن

$$p \Rightarrow p \vee P(p,q,\dots)$$

# تمارين الفصل الثالث

١ – استخدم جداول الحقيقة فى توضيح التقارير الصائبة منطقيا ( التحصيل الحاصل) والتقارير الخاطئة منطقيا ( التناقض ) فى كل مما يأتى :

(1) - $p \wedge q \rightarrow q$

(2) - $p \vee q \rightarrow q$

(3) - $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow p \vee \sim q$

(4) - $p \wedge q \leftrightarrow \sim p \wedge q$

(5) - $\sim p \vee q \leftrightarrow p \rightarrow q$

(6) - $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

(7) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$

(8) - $q \leftrightarrow \sim p \veebar q$

(9) - $p \veebar q \rightarrow \sim p$

(10) - $p \wedge (q \vee r)$

٢ – وضح التقارير الصائبة منطقيا فيما يأتى :

(1) - $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

(2) - $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$

(3) - $(p \rightarrow q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

(4) - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

(5) - $(\sim p \rightarrow \sim r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow q)$

٣ – حدد الصواب والخطأ فى كل مما يأتى :

(1) - $p \Rightarrow p \wedge q$

(2) - $p \Rightarrow p \vee q$

(3) - $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

(4) - $q \Rightarrow p \rightarrow q$

(5) - $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$

(6) - $p \veebar q \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$

(7) - $p \veebar q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$

(8) - $\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

(9) - $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(10) - $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$

٤ – أثبت كل مما يأتى :

(1) - $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$

(2) - $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

(3) - $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

(4) - $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$

(5) - $\sim(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

(6) - $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

(7) - $p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

(8) - $(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow q) \wedge r \Rightarrow \sim p$

(9) - $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

(10) - $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$

٥ – باستخدام جداول الحقيقة أثبت كل مما يأتى :

(1) - $p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p$

(2) - $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

(3) - $p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$

(4) - $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$

(5) - $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

(6) - $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv q \leftrightarrow p$

(7) - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(8) - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(9) - $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(10) - $p \rightarrow (\sim q \wedge r) \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge r)$

٦ - استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير مكافئ فى كل من التقارير الآتية :

(1) - $\sim p \wedge q$

(2) - $p \wedge \sim q$

(3) - $\sim (p \wedge q)$

(4) - $\sim (\sim p \wedge q)$

(5) - $\sim p \rightarrow q$

(6) - $\sim (\sim p \wedge \sim q)$

(7) - $(p \wedge q) \vee r$

(8) - $\sim (r \vee p \leftrightarrow q) \wedge s$

(9) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$

(10) - $(\sim p \vee q \rightarrow r) \wedge s$

٧ - استخدم قانون ديمورجان فى أعاده صياغة كل من التقارير الآتية :

١ ) من الخطأ القول انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة .

٢ ) المنطق الرياضى لغة علمية ولا غنى عنها فى الرياضيات .

٣ ) من الخطأ أن نقول ما لا نعنيه أو لا نعنى بما نقوله .

٤ ) المنطق الرياضى هو علم التفكير الدقيق ومن الخطأ أن نقول انه يوجد له قواعد غير واضحة أو لغته العلمية غير مفهومة .

٥ ) من الخطأ القول أن الشباب يجدون فرص عمل جديدة والصحراء من حولنا لا يتم تعميرها.

٦ ) ليس صحيحا أن اليوم أو غدا إجازة .

٧ ) إما الطائرة تأخرت عن الإقلاع أو ساعتى غير مضبوطة .

٨ ) هو غير سعيد لكن إذا اخلص فى عمله فسوف يكون سعيد .

٩ ) هو سعيد لكن إذا لم يخلص فى عمله فإنه لن يكون سعيد .

١٠ ) إما هو غير سعيد أو غير مخلص فى عمله .

٨ – بسط كلا من التقارير الآتية :

١ ) من الخطاء القول أن الشمس ساطعة أو السماء لا تمطر بينما الريح عاصف.

٢ ) ليس صحيحا أن سطوع الشمس أو عدم وجود رياح عاصفة شـــرط كافى لعـــــدم سقوط المطر.

٣ ) ليس صحيحا أن الشرط الضرورى لعدم سقوط المطر هو أن تكون الشمس مشرقة.

٤ ) ليس صحيحا أن عدم الإخلاص فى العمل يؤدى إلى السعادة أو النجاح فى الحياة.

٥ ) من الخطأ القول أن الشباب لا يجدون فرص عمل جديدة والصحراء من حولنا يتـــم تعميرها.

٦ ) ليس من الحقيقى أن الغربة عن الوطن غير صعبة إذا ما كانت الأسرة معي.

٧ ) من الخطأ القول أن اليوم يكون السبت شرط كافي لكى يكون غدا هو يوم الأحد.

٨ ) أن لا يكون غدا هو يوم الأحد شرط ضرورى لكى لا يكون اليوم هو يوم السبت.

٩ ) ليس من الحقيقى انه إذا كان $x^2 \neq 4$ فإن $x = 2$ أو $x = -2$ .

١٠ ) من الخطأ أن نقول انه إذا كان العدد $x$ غير زوجى فإنه يكون عدد أولى.

٩ – استخدم التكافؤ $p \to q \equiv \sim p \vee q$ فى إعادة صياغة كل من التقارير الآتية :

١ ) إذا كان اليوم هو يوم الثلاثاء فإن غدا لن يكون يوم الأحد .

٢ ) إذا لم تلتزم بالنظام داخل قاعة الدراسة فإننى سوف أخرجك من القاعة .

٣ ) عدم المواظبة على حضور المحاضرات شرط كافى للحرمان من دخول الامتحان.

٤ ) الشرط الضرورى لكى يكون مخلص فى عمله هو أن يكون سعيد .

٥ ) إذا كان غير مخلص فى عمله فإنه لن يكون ناجح فى حياته .

٦ ) إذا كان الجو حار فإن الأمطار لن تسقط .

٧ ) السماء لن تمطر و الشمس لن تسطع إذا كانت الرياح غير عاصفة .

٨ ) إذا كانت الرياح عاصفة فإن السماء تمطر أو الشمس غير ساطعة .

٩ ) سطوع الشمس أو عدم وجود رياح عاصفة شــرط كاف لسقوط المطر .

١٠) إذا لم تستحى فافعل ما تشاء .

١١) فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين.

١٢) إذا كان المثلث غير قائــم الزاوية فإن مربـــــع طول الوتر لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين .

١٣) إذا كان مربع طول الوتر فى مثلث لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث لا يكون قائم الزاوية .

١٤) يقال أن الزاويتان متتامتان إذا كان مجموعهم يساوى ٩٠ درجة .

١٥) إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .

١٦) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين فى القياس وكل زاويتين متناظرتين متساويتين فى القياس .

١٧) يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث وكـــانت إمـا زاويتـــان متبادلتـــان متساويتان فى القياس أو زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس .

١٨) إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتين فى القياس .

١٩) $x$ عددا زوجيا شرط كاف لكي يكون $x^2$ عددا زوجيا .

٢٠) إذا كان $x$ عددا أوليا واكبر من 3 فإنه لن يكون عددا زوجيا .

١٠ ) – استخدم قوانين جبر التقارير فى تبسيط كل من التقارير الآتية :

1 - $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

2 - $p \wedge (\sim p \vee q)$

3 - $\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q)$

4 - $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$

5 - $((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$

6 - $((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

7 - $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

8 - $((p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$

9 - $(p \wedge (\sim q \vee r)) \vee q$

10 - $(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (\sim q \wedge p))$

١١ ) – اكتب عكس ومقلوب ومضاد كلا من التقارير الآتية موضحا قيمة الحقيقة فى كل حالة :

١ ) إذا كان $x = 4$ فإن $x^3 = 64$ .

٢ ) $a + c = b + c$ بشرط أن $a = b$ .

٣ ) إذا كان $a < b$ فإن $a+c < b+c$ .

٤ ) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين .

٥ ) إذا كان العدد x يقبل القسمة على 12 فإنه يقبل القسمة على 6 .

٦ ) $x > 5$ شرط ضرورى لكى يكون $x > 3$ .

٧ ) $x > 5$ شرط كاف لكى يكون $x > 3$ .

٨ ) اتصال الدالة عند النقطة شرط كاف لكى تكون الدالة قابلة للتفاضل عند هذه النقطة.

٩ ) الشرط الكافى لتفاضل الدالة عند نقطة هو أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة.

١٠) الشرط الضرورى لتفاضل الدالة عند نقطة هو أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة .

١٢ ) - اكتب عكس ومقلوب ومضاد ونفى كلا من التقارير الآتية فى ابسط صورة :

١ ) إذا كان اليوم هو يوم الثلاثاء فأن غدا لن يكون الخميس .

٢ ) اليوم ليس الأحد فقط إذا كان غدا ليس الاثنين .

٣ ) إذا لم تفهم التقارير المتكافئة جيدا فأنصحك بقراءتها بعناية من جديد .

٤ ) إذا كنت تعمل بإخلاص فإنك سوف تحقق النجاح .

٥ ) فاقد الشئ لا يعطيه .

١٣ - أثبت أنه لأى افتراض $P(p,q,\dots)$ فإن

1) $p \Rightarrow p \wedge P(p,q,\dots)$

2) $p \wedge P(p,q,\dots) \Rightarrow p$

3) $p \wedge P(p,q,\dots) \Rightarrow p \vee P(p,q,\dots)$

١٤ - إذا كان $P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$ فأثبت أن $P(p_0,q_0,\dots) \equiv Q(p_0,q_0,\dots)$

لأى تقارير $p_0 , q_0 , \dots$ تحل مكان $p , q , \dots$ .

١٥ - للافتراضات

$$P(p,q,r) = p \rightarrow (\sim q \wedge r)$$
$$Q(p,q,r) = \sim(p \wedge q) \wedge (\sim q \vee r)$$
$$R(p,q,r) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$
$$S(p,q,r) = \sim p \vee (\sim q \vee r)$$
$$T(p,q,r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

وضح الصواب والخطأ فى كل مما يأتى :

(1) - $P(p,q,r) \equiv Q(p,q,r)$

(2) - $P(p,q,r) \Rightarrow Q(p,q,r)$

(3) - $R(p,q,r) \Rightarrow T(p,q,r)$

(4) - $R(p,q,r) \Leftrightarrow S(p,q,r)$

(5) - $S(p,q,r) \equiv T(p,q,r)$

الفصل



# المقاييس ( الأسوار )

# Quantifiers

## ١ – الدوال الافتراضية (دوال التقارير)

نعلم أن التقرير هو جملة خبرية ذات معنى تحمل خبرا ويمكن الحكم بأنها إما صائبة وإما خاطئة ولا تكون صائبة وخاطئة فى آن واحد، وتوجد بعض الجمل التى تحتوى على رموز تسمى متغيرات، وهذه المتغيرات تأخذ قيما معينة ومثل هذه الجمل تسمى بالجمل المفتوحة ولتوضيح ذلك نفرض الجملة

" $x > 6$ حيث $x$ عدد ينتمى لمجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ "

هذه الجملة لا تمثل تقرير لأنها تحتمل الصواب أو الخطأ وذلك تبعا لقيمة المتغير $x$ التى يتم التعويض بها فى الجملة ، فمثلا إذا وضعنا $x = 8$ فإن الجملة تصبح " $8 > 6$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة صواب أما إذا وضعنا $x = 4$ فإن الجملة تصبح " $4 > 6$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة خطأ. وكمثال آخر نفرض الجملة

"$x + y > 5$ حيث $x , y$ أعداد تنتمى لمجموعة الأعداد الطبيعية"

هذه الجملة أيضا لا تمثل تقرير لأنها تحتمل الصواب أو الخطأ وذلك تبعا لقيمة المتغيرات $x , y$ التى يتم التعويض بها فى الجملة، فمثلا إذا وضعنا $x = 2 , y = 4$ فإن الجملة تصبح " $2 + 4 > 5$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة صواب أما إذا وضعنا $x = 1 , y = 3$ فإن الجملة تصبح " $1 + 3 > 5$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة خطأ.

تعريف ١ : الجملة المفتوحة هى جملة تحتوى على متغير أو اكثر وهذه الجملة تتحول إلى تقرير عند إعطاء المتغير أو المتغيرات قيما معينة، ومجموعة القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير أو المتغيرات تسمى مجموعة التعويض والجملة المفتوحة تسمى دالة افتراضية.

تعريف ٢: نفرض أن المجموعة A معطاة ضمنياً (مجموعة التعويض)، الدالة الافتراضية أو ببساطة الجملة المفتوحة للمجموعةA يرمز لها p(x) وهى تحقق الخاصية

"لكل $a \in A$ فإن p(a) تكون تقرير صواب أو خطأ"

أى إن

**"p(x) دالة افتراضية للمجموعة A إذا كان لأى عنصر $a \in A$ يحل محل المتغير x فى p(x) فإن p(a) تصبح تقرير."**

مثال ١ : نفرض مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ونفرض أن p(x) ترمز إلى الجملة "$x + 3 > 8$"

أذن p ( x ) تمثل دالة افتراضية فى N ونلاحظ أن

p(1) هو التقرير "$1 + 3 > 8$" وهو تقرير خاطئ

بينما

p(6) هو التقرير "$6 + 3 > 8$" وهو تقرير صائب.

مثال ٢ : نفرض مجموعة الأعداد المركبة $C = \{ a + ib \mid a, b \in R \}$

ونفرض أن p(x) ترمز إلى الجملة "$x + 3 > 8$"

أذن p( x ) لا تمثل دالة افتراضية فى C لان العلاقة > غير معرفة على مجموعة الأعداد المركبة .

تعريف ٣ : إذا كانت p( x ) دالة افتراضية للمجموعة A أذن مجموعة العناصر $a \in A$ التى يكون عندها التقرير p( a ) صواب تسمى مجموعة الصواب للدالة p( x ) ويرمز لها $T_p$ ، أى إن

$$T_p = \{ a \mid a \in A \quad , \quad p(a) \text{ صواب} \}$$

أو اختصارا يكتب

$$T_p = \{ a \mid p(a) \}$$

مثال ٣ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x + 3 > 8$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N. أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in N , a + 3 > 8 \}$$
$$= \{ 6 , 7 , 8 , \ldots \} \subset N$$

مثال ٤ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x + 3 > 2$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in N , a + 3 > 2 \} = N$$

مثال ٥ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x + 3 < 2$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in N , a + 3 < 2 \}$$
$$= \Phi$$

أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى المجموعة الخالية.

مثال ٦ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x^2 + 2 > 5$ " المعرفة على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$. أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in (-1,1) , a^2 + 2 > 5 \}$$
$$= \Phi$$

أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى المجموعة الخالية.

نلاحظ من الأمثلة ٣ , ٤ , ٥ , ٦ انه إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية معرفة على المجموعة A فإن $p(a)$ يمكن أن تكون صواب لبعض $a \in A$ أو صواب لكل $a \in A$ أو ليست صواب لكل $a \in A$ ، أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ على المجموعة A يمكن أن تكون

$$T_p = \Phi \quad \text{أو} \quad T_p = A \quad \text{أو} \quad T_p \subset A$$

## ٢ – تقارير تحتوى على مقاييس (الأسوار Quantifiers)

فى حديثنا اليومى كثيرا ما يصدر عنا بعض العبارات التى تشتمل على الكلمات

(كل – جميع – بعض – يوجد بعض – . . . )

وكأمثلة على ذلك العبارات الآتية :

- كل الطلاب حضروا الامتحان .
- جميع طلاب قسم الرياضيات يدرسون المنطق الرياضى .
- بعض الأعداد الصحيحة يكون سالب .
- يوجد بعض الطلاب راسبون .
- لكل مجتهد نصيب .

ومثل هذه الكلمات تسمى مقاييس ( أسوار ) ، والكلمات (كل - جميع ) تعتبر بمثابة تسوير كلي للعبارة، بمعنى أننا نقوم بتشييد سورا كاملا حول العبارة بحيث لا يفلت منها أى عنصر، فعندما نقول

" كل الطلاب حضروا الامتحان "

فمعنى ذلك أن كلمة كل قد شيدت سورا كاملا حول العبارة ( الطلاب حضروا الامتحان ) أى لم يتغيب أحد على الإطلاق وذلك بسبب قوة كلمة كل، و عندما نقول جميع الأعداد

الطبيعية موجبة فمعنى ذلك انه لا يوجد أى عدد طبيعى مهما كان غير موجب والسبب أن كلمة جميع هى بمثابة تسو ير كلى للعبارة. إما الكلمات ( بعض- يوجد بعض ) فتعتبر بمثابة تسو ير جزئى حول العبارة يحمى جزء واحد فقط من العبارة بينما بقية الأجزاء غير محمية. فعندما نقول

" بعض الأعداد الصحيحة يكون سالب "

فمعنى ذلك أن السور تم تشيده حول الأعداد السالبة فقط وهذه العبارة تعنى أن هناك أعداد صحيحة تكون غير سالبة.

ويستخدم الرمز $\forall$ للتعبير عن كلمة (كل - جميع) أو ما شابه ذلك فى المعنى ويستخدم الرمز $\exists$ للتعبير عن كلمة (يوجد - يوجد بعض) أو ما شابه ذلك فى المعنى.

**تعريف ٤ : المقياس الشامل Universal Quantifier**

إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة **A** أذن التقرير

" لكل عنصر $x$ فى المجموعة $A$ فإن $p(x)$ تقرير صواب "

أو بالاختصار التقرير

" لكل $x$ فإن $p(x)$ "

يمكن التعبير عنه بالصورة

$$(\forall\ x \in A)\ (p(x))$$

أو بالصورة المختصرة

$$\forall x\ ,\ p(x)$$

والرمز $\forall$ والذى يقرأ "لكل" أو "لجميع" يسمى مقياس شامل.

ملاحظات :

١ - إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة $A$ وكان مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى نفسها المجموعة $A$ ، أى إن $T_p = A$ فإن التقرير " $\forall x \;,\; p(x)$ " يكـــون صواب.

٢ - إذا كان $T_p \neq A$ فإن التقرير " $\forall x \;,\; p(x)$ " يكون خطأ.

٣ - الدالة الافتراضية $p(x)$ فى حد ذاتها هى جملة مفتوحة ولذلك ليس لها قيمة حقيقة لكن عند كتابة المقياس $\forall$ أمام $p(x)$ فإن " $\forall x \;,\; p(x)$ " تصبح تقرير وبالتالى له قيمة حقيقة.

مثال ٧ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية "x حضر الامتحـان " وان $S$ ترمـــز إلى مجموعة الطلاب فى مدرسة ما، أذن التقرير

"كل الطلاب حضروا الامتحان"

يمكن أن يكتب بالصورة

$$(\forall\, x \in S)\,(p(x)) \quad \text{أو اختصارا} \quad \forall x \;,\; p(x)$$

مثال ٨ : أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

1) - $(\forall\, n \in N)\,(n+3>2)$

2) - $(\forall\, n \in N)\,(n+3>6)$

الحل :

١ ) - التقرير $(\forall\, n \in N)\,(n+3>2)$ صواب لان

$$\{\, n \mid n+3>2 \,\} = \{\, 1, 2, 3, \ldots \,\} = N$$

٢ ) – التقرير $(\forall\ n \in N)(n+3>6)$ خطأ لان

$$\{\ n \mid n+3>6\ \} = \{\ 4, 5, 6, \dots\ \} \neq N$$

مثال ٩ : يمكن استخدام المقياس الشامل $\forall$ لتعريف تقاطع عائلة من المجموعات $\{A_i\}_{i\in J}$ ، حيث J تمثل مجموعة من الأعداد الطبيعية (منتهية أو غير منتهية)، كالآتى

$$\bigcap_{i\in J} A_i = \left\{ x \mid \forall\ i \in J\ ,\ x \in A_i \right\}$$

تعريف ٥ : مقياس الوجود Existential Quantifier

إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A أذن التقرير

"يوجد عنصر x فى المجموعة A بحيث أن $p(x)$ تقرير صواب"

أو بالاختصار

"يوجد بعض x بحيث أن $p(x)$ "

يمكن التعبير عنه بالصورة

$$(\exists\ x \in A)\ (p(x))$$

أو بالصورة المختصرة

$$\exists\, x\ :\ p(x)$$

الرمز $\exists$ والذى يقرأ يوجد أو يوجد بعض أو لواحد على الأقل يسمى مقياس وجود والرمز " : " يستخدم عادة ليعبر عن " بحيث أن ".

ملاحظات :

١ - إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A وكان مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ غير خالية،

أى إن $T_p \neq \Phi$ فإن التقرير " $\exists x : p(x)$ " يكون صواب.

٢ - إذا كان $T_p = \Phi$ فإن التقرير " $\exists x : p(x)$ " يكون خطأ.

٣ - الدالة الافتراضية $p(x)$ فى حد ذاها هى جملة مفتوحة ولذلك ليس لها قيمة صواب لكن عند كتابة المقياس $\exists$ أمام $p(x)$ فإن " $\exists x : p(x)$ " تصبح تقرير وبالتالى له قيمة صواب.

مثال ١٠ : أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

1) - $(\exists n \in N)(n + 3 < 8)$

2) - $(\exists n \in N)(n + 3 < 2)$

الحل :

١ ) - التقرير $(\exists n \in N)(n + 3 < 8)$ صواب لأن

$$\{ n \in N \mid n + 3 < 8 \} = \{ 1, 2, 3, 4 \} \neq \Phi$$

٢ ) - التقرير $(\exists n \in N)(n + 3 < 2)$ خطأ لأن

$$\{ n \in N \mid n + 3 < 2 \} = \Phi$$

مثال ١١ : يمكن استخدام مقياس الوجود $\exists$ لتعريف اتحاد عائلة المجموعات $\{ A_i \}_{i \in J}$ ، حيث J تمثل مجموعة من الأعداد الطبيعية (منتهية أو غير منتهية)، كالآتى

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \{ x \mid \exists i \in J : x \in A_i \}$$

مثال ١٢ : اختبر صحة التقرير

" يوجد عدد طبيعى n بحيث أن $20 < n^2 < 60$ "

الحل : يمكن كتابة التقرير بالصورة

$$\exists\ n \in N\ :\ 20 < n^2 < 60$$

وحيث أن

$$\{n \in N \mid 20 < n^2 < 60\} = \{5, 6, 7\} \neq \Phi$$

أذن التقرير يكون صواب .

مثال ١٣ : حدد نوع المقياس (شامل – وجود) فى كلا من التقارير الآتية ثم اعد صياغة التقرير فى صورة رمزية:

١ ) بعض الطلاب يحبون دراسة المنطق .

٢ ) كل المثلثات متساوية الأضلاع .

٣ ) جميع الأعداد الطبيعية موجبة .

٤ ) يوجد عدد حقيقى $x$ يحقق المعادلة $x^2 - 5 = 0$ .

٥ ) يوجد بعض الأعداد الطبيعية مربعها يساوى $16$ .

٦ ) يوجد حل للمعادلة $x^2 + 4 = 0$ فى مجموعة الأعداد المركبة .

٧ ) القيمة المطلقة لأى عدد حقيقى تكون غير سالبة .

٨ ) كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين $0, 1$ مربعها يكون اقل من $1$ .

الحل : فى الجدول الآتى نحدد نوع المقياس ونضع التقارير والمناظر لها باستخدام الرموز :

| التقرير فى صيغة جملة إنشائية | المقياس | التقرير باستخدام الرموز |
|---|---|---|
| ١) بعض الطلاب يحبون دراسة المنطق. | وجود | $\exists x \in S :$ $x$ يحب دراسة المنطق حيث $S$ مجموعة الطلاب. |
| ٢) كل المثلثات متساوية الأضلاع. | شامل | $\forall x \in T ,$ $x$ مثلث متساوى الأضلاع حيث $T$ مجموعة المثلثات. |
| ٣) جميع الأعداد الطبيعية موجبة. | شامل | $\forall x \in N\ ,\ x > 0$ |

| التقرير فى صيغة جملة إنشائية | المقياس | التقرير باستخدام الرموز |
| --- | --- | --- |
| ٤) يوجد عدد حقيقى $x$ يحقق المعادلة $x^2 - 5 = 0$ . | وجود | $\exists x \in R : x^2 - 5 = 0$ |
| ٥) يوجد بعض الأعداد الطبيعية مربعها يساوى 16. | وجود | $\exists n \in N : n^2 = 16$ |
| ٦) يوجد حل للمعادلة $x^2 + 4 = 0$ فى مجموعة الأعداد المركبة. | وجود | $\exists x \in C : x^2 + 4 = 0$ |
| ٧ ) القيمة المطلقة لأى عدد حقيقى تكون غير سالبة. | شامل | $\forall x \in R \ , \ \lvert x \rvert \geq 0$ |
| ٨ ) كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 , 1 مربعها يكون اقل من 1. | شامل | $\forall x \in (0,1) \ , \ x^2 < 1$ |

مثال ١٤ : حول الجمل الآتية من صيغة الرموز إلى جمل إنشائية

1 - $\forall x \in N \ , \ x + 3 > 5$

2 - $\exists x \in R : x^2 = 3x$

3 - $\exists x \in S :$ طالب غير مجتهد $x$ (مجموعة الطلاب بالفصل S)

4 - $\forall x \in R \ , \ x \geq 0$

5 - $\exists x \in T :$ مثلث متساوى الأضلاع $x$ ( مجموعة المثلثات T )

الحل :

١ – لكل عدد طبيعى $x$ فإن $x + 3 > 5$ .

٢ – يوجد عدد حقيقى $x$ بحيث يحقق المعادلة $x^2 = 3x$ .

٣ – بعض طلاب الفصل غير مجتهدون.

٤ – كل الأعداد الحقيقية غير سالبة.

٥ – يوجد بعض المثلثات المتساوية الأضلاع.

مثال ١٥ : بفرض أن مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية.

1- $\forall x \ , \ |x| = x$ 3- $\exists x : x^2 = 3x$

2- $\forall x \ , \ x + 2 > x$ 4- $\exists x : x + 1 \leq x$

الحل :

١ – خطأ : نلاحظ انه إذا كان $x$ عدد سالب فإن $|x| \neq x$.

٢ – صواب : لأنه لكل عدد حقيقى $x$ يوجد حل للمتباينة $x + 2 > x$.

٣ – صواب : لأنه بوضع $x = 3$ تتحقق المعادلة $x^2 = 3x$.

٤ – خطأ : لأنه لا يوجد حل للمتباينة $x + 1 \leq x$.

مثال ١٦ : بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

1- $\exists x \in A : x + 2 = 9$ 3- $\forall x \in A \ , \ x + 2 \leq 6$

2- $\forall x \in A \ , \ x + 2 < 9$ 4- $\exists x \in A : 2x + 1 < 6$

الحل :

١ – خطأ : لأنه لا يوجد عدد فى المجموعة$A$ يحقق المعادلة $x + 2 = 9$.

٢ – صواب : لان كل عدد فى المجموعة$A$ يحقق المتباينة $x + 2 < 9$.

٣ – خطأ : لان $x = 5$ لا تحقق المتباينة $x + 2 \leq 6$.

٤ – صواب : لأنه بوضع $x = 1$ أو $x = 2$ تتحقق المتباينة $2x + 1 < 6$.

مثال ١٧ : حدد قيمة الحقيقة فى كل من التقارير الآتية :

1) $\exists n \in \{1,2,3,4\} : (n^2 \leq 8) \vee (n^3 > 30)$

2) $\forall n \in \{1,2,3,4,5\} , \ n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 25$

الحل :

١ ) بأخذ $n = 1$ أو $n = 2$ نجد أن

$n^2 \leq 8$ صواب

$n^3 > 30$ خطـــأ

ومن تعريف أداة الفصل، أذن فى هـــذه الحالـــة $(n^3 > 30) \vee (n^2 \leq 8)$ يكـــون صواب وبالتالى التقرير المعطى يكون صواب ونلاحظ أيضا انه إذا أخذنا $n = 4$ فإن

$n^2 \leq 8$ خطـــأ

$n^3 > 30$ صواب

أذن فى هذه الحالة أيضا $(n^3 > 30) \vee (n^2 \leq 8)$ يكون صواب وبالتالى التقريـــر المعطى يكون صواب.

٢ ) لمعرفة قيمة الحقيقة للتقرير

$$\forall\ n \in \{1,2,3,4,5\},\quad n^2 \leq 10 \quad \rightarrow \quad n^3 < 25$$

نبحث فى جميع قيم $n$ المختلفة ونستخدم تعريف أداة الشرطية كما موضح بـــالجدول الآتى:

| n | $n^2 \leq 10$ | $n^3 < 25$ | $n^2 \leq 10 \quad \rightarrow \quad n^3 < 25$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $1 \leq 10$ صواب | $1 < 25$ صواب | صواب |
| 2 | $4 \leq 10$ صواب | $8 < 25$ صواب | صواب |
| 3 | $9 \leq 10$ صواب | $27 < 25$ خطـــأ | خطـــأ |
| 4 | $16 \leq 10$ خطأ | $64 < 25$ خطـــأ | صواب |
| 5 | $25 \leq 10$ خطأ | $125 < 25$ خطـــأ | صواب |

ويتضح من الجدول أن التقرير لا يتحقق فى حالة $n = 3$ ، أذن التقرير المعطى يكون خطـــأ.

## ٣ - نفي التقارير التي تحتوي على مقاييس

توجد بعض الأخطاء الشائعة عند نفي التقارير التي تحتوي على مقاييس ولتوضيح ذلك نفرض التقرير

" كل الطلاب حضروا الامتحان "

نلاحظ انه من الأخطاء الشائعة أن ننفي هذا التقرير بقولنا "كل الطلاب لم يحضروا الامتحان" لان أحدهم ليس نفي للأخر، ولتوضيح ذلك نفترض أن بعض الطلاب حضروا وبعضهم غلب عن الامتحان حينئذ سيكون التقرير الأول خاطئ وكذلك التقرير الثاني خاطئ وهذا يمثل تعارض حيث أننا نعلم أن قيمة الحقيقة لنفي التقرير تكون عكس قيمة الحقيقة للتقرير، ولكن من الواضح أننا نستطيع الحكم على خطأ التقرير "كل الطلاب حضروا الامتحان" إذا كان يوجد طالب واحد على الأقل لم يحضر الامتحان وعلى ذلك فإن نفي هذا التقرير يكون

"ليس من الحقيقي أن كل الطلاب حضروا الامتحان"

وهذا يعني

" يوجد على الأقل طالب واحد لم يحضر الامتحان "

وحيث أن كلمة "بعض " تعني "واحد على الأقل" فإن نفي التقرير يمكن ان يصاغ كما يلي:

" بعض الطلاب لم يحضروا الامتحان "

وبفرض أن $A$ ترمز إلى مجموعة الطلاب، والدالة الافتراضية $p(x)$ ترمز إلى " $x$ طالب حضر الامتحان" فإنه يمكننا صياغة القاعدة الآتية:

$$\sim\big(\forall x \in A\ ,\ p(x)\big) \equiv \exists x \in A : \sim p(x)$$

أي إن

نفى التقرير $\forall\ x\ ,\ p(x)$ والذى يحتوى على المقياس الشامل يتم فى الخطوات الآتية :

١ - تحويل المقياس الشامل $\forall$ إلى مقياس الوجود $\exists$

٢ - تحويل علامة الفاصلة " , " إلى علامة حيث أن " : "

٣ - تحويل $p(x)$ إلى صيغة النفى $\sim p(x)$

وللتعرف على كيفية نفى تقرير يحتوى على مقياس الوجود $\exists$ نفرض التقرير

" بعض طلاب الفصل راسبون "

من الواضح أننا نستطيع الحكم على خطأ هذا التقرير إذا كان لا يوجد أى طالب راسب وعلى ذلك فإن نفى هذا التقرير يكون

" ليس من الحقيقى أن بعض طلاب الفصل راسبون "

وهذا يعنى

" لا يوجد بالفصل أى طالب راسب "

أذن نفى التقرير يمكن ان يصاغ كما يلى :

" كل طلاب الفصل غير راسبون "

وبفرض أن $A$ ترمز إلى مجموعة الطلاب، والدالة الافتراضية $p(x)$ ترمز إلى "$x$ طالب راسب" فإنه يمكننا صياغة القاعدة الآتية:

$$\sim\big(\exists\, x \in A\ :\ p(x)\big) \equiv \forall\, x \in A\ ,\ \sim p(x)$$

أى إن

نفى التقرير $\exists\ x\ :\ p(x)$ والذى يحتوى على مقياس الوجود يتم فى الخطوات الآتية:

١ - تحويل مقياس الوجود $\exists$ إلى المقياس الشامل $\forall$

٢ - تحويل علامة حيث أن " : " إلى علامة الفاصلة " , "

٣ - تحويل $p(x)$ إلى صيغة النفى $\sim p(x)$

## نظرية (ديمورجان):

$$\sim\left(\forall x \in A \;,\; p(x)\right) \equiv \exists x \in A : \sim p(x)$$

$$\sim\left(\exists x \in A \;:\; p(x)\right) \equiv \forall x \in A \;,\; \sim p(x)$$

مثال ١٨ : أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

١ – جميع الرجال شجعان .

٢ – كل الأعداد الفردية أعداد أولية .

٣ – بعض الطلاب لم يكملوا واجباهم .

٤ – يوجد بعض الطلبة غير مجتهدين .

٥ – لكل عدد طبيعى $n$ فإن $n + 3 < 7$ .

الحل :

بتطبيق قوانين ديمورجان

١ – التقريـــــــر : " جميع الرجال شجعان " يحتوى على مقياس شامل
نفى التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان جميع الرجال شجعان "
≡ " يوجد على الأقل أحد الرجال ليس شجاع "
≡ " يوجد بعض الرجال ليسوا شجعانا "

٢ – التقريـــــــر : " كل الأعداد الفردية أعداد أولية " يحتوى على مقياس شامل
نفى التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان كل الأعداد الفردية أعداد أولية "
≡ " يوجد على الأقل عدد فردى وليس أولى "
≡ " يوجد بعض الأعداد الفردية ليست أولية "

٣ - التقريـــــــر : " بعض الطلاب لم يكملوا واجباهم " يحتوى على مقياس وجود

نفي التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان بعض الطلاب لم يكملوا واجباهم "

≡ " كل الطلاب اكملوا واجباهم "

٤ - التقريـــــــر : " يوجد بعض الطلبة غير مجتهدين " يحتوى على مقياس وجود

نفي التقرير يكون : " كل الطلاب مجتهدون "

٥ - التقريـــــــر : "لكل عدد طبيعىn فإن $n + 3 < 7$ " يحتوى على مقياس شامل

نفي التقرير يكون : " يوجد عدد طبيعىn بحيث ان $n + 3 < 7$ غير متحققة"

≡ "يوجد على الأقل عدد طبيعىn بحيث ان $n + 3 \geq 7$ "

مثال ١٩ : بفرض أن مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة التعويض ، أوجد نفى كل مـــن التقارير الآتية :

1. $\forall x \; , \; |x| = x$
2. $\forall x \; , \; x + 2 > x$
3. $\exists x : x^2 = 3x$
4. $\exists x : x + 1 \leq x$

الحل : بتطبيق قوانين ديمورجان

1. $\sim ( \forall x \; , \; |x| = x ) \equiv \exists x : \sim ( |x| = x )$
$\equiv \exists x : |x| \neq x$

2. $\sim ( \forall x \; , \; x + 2 > x ) \equiv \exists x : \sim ( x + 2 > x )$
$\equiv \exists x : x + 2 \leq x$

3. $\sim ( \exists x : x^2 = 3x ) \equiv \forall x \; , \sim ( x^2 = 3x )$
$\equiv \forall x : x^2 \neq 3x$

4. $\sim ( \exists x : x + 1 \leq 1 ) \equiv \forall x \; , \sim ( x + 1 \leq 1 )$
$\equiv \forall x : x + 1 > 1$

ملاحظة : بفرض أن $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A فإن $\sim p(x)$ تكون أيضا دالة افتراضية ويمكن الحصول عليها بكتابة " ليس من الحقيقى أن $p(x)$ " وتكـــون مجموعة الصواب للدالة $\sim p(x)$ هى مكملة مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ فى المجموعة الشاملة A ، فإذا كانت $p(a)$ صواب فإن $\sim p(a)$ تكـــون خطـــأ والعكس صحيح. وفى الفصل الثانى استخدمنا الرمز ~ كأداة من أدوات الربـــط للتقارير، وهنا تستخدم كعملية من عمليات الدوال الافتراضيـــة ، وبـــالمثل يمكـــن استخدام أداة الوصل $\wedge$ وأداة الفصل $\vee$ كعمليات على الـــدوال الافتراضيـــة ، وبفرض أن $p(x), q(x)$ دوال افتراضية فإن

$p(x) \wedge q(x)$ تقرأ " $p(x)$ و $q(x)$ "

$p(x) \vee q(x)$ تقرأ " $p(x)$ أو $q(x)$ "

ويمكن تطبيق قوانين جبر التقارير على الدوال الافتراضية فمثلا

$$\sim (p(x) \wedge q(x)) \equiv \sim p(x) \vee \sim q(x)$$
$$\sim (p(x) \vee q(x)) \equiv \sim p(x) \wedge \sim q(x)$$
$$\sim (p(x) \rightarrow q(x)) \equiv p(x) \wedge \sim q(x)$$

مثال ٢٠ : أوجد فى ابسط صورة نفى التقرير

" الآن وقت الصباح وكل الناس استيقظوا "

الحل : التقرير من نوع الوصلة .

نفرض

التقرير $p$ : " الآن وقت الصباح "

التقرير $q$ : " كل الناس استيقظوا " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

وباستخدام قانون ديمورجان

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

وحيث أن $\sim p$ : " الآن ليس وقت الصباح "

$\sim q$ : " بعض الناس لم يستيقظوا "

أذن نفى التقرير المعطى يكون

" الآن ليس وقت الصباح أو ليس صحيحا أن كل الناس استيقظوا "

وهذا يكافئ

" الآن ليس وقت الصباح أو بعض الناس لم يستيقظوا "

مثال ٢١ : أوجد فى ابسط صورة نفى التقرير

" بعض المدارس مغلق اليوم أو كل الطلاب حاضرون "

الحل : التقرير من نوع الفاصلة .

نفرض

التقرير $p$ : " بعض المدارس مغلق اليوم " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

التقرير $q$ : " كل الطلاب حاضرون " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

وباستخدام قانون ديمورجان

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

أذن نفى التقرير يكون

"ليس صحيحا أن بعض المدارس مغلق اليوم وليس صحيحا أن كل الطلاب حاضرون"

وهذا يكافئ

" كل المدارس مفتوحة اليوم وبعض الطلاب غائبون"

مثال ٢٢ : أوجد فى ابسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

١ - إذا كان الجو حار فإن بعض المزروعات لا تنمو .

٢ - الشرط الكافى لتلاشى كل السحب اليوم هو سقوط بعض الأمطار .

الحل :

١ - التقرير من نوع الشرطية .

نفرض

التقرير $p$ : " الجو حار "

التقرير $q$ : " بعض المزروعات لا تنمو " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

أذن التقرير يكون على الصورة $p \to q$ وحيث إن

$$\sim ( p \to q ) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن نفى التقرير يكون

" الجو حار وليس صحيحا أن بعض المزروعات لا تنمو "

وهذا يكافئ

" الجو حار وكل المزروعات تنمو "

٢ - التقرير من نوع الشرطية .

نفرض

التقرير $p$ : " كل السحب تتلاشى اليوم " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

التقرير $q$ : " بعض الأمطار تسقط " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

أذن التقرير يكون على الصورة $q \to p$ وحيث إن

$$\sim ( q \to p ) \equiv q \wedge \sim p$$

أذن نفى التقرير يكون

"بعض الأمطار تسقط وليس صحيحا أن كل السحب تتلاشى اليوم"

وهذا يكافئ

"بعض الأمطار تسقط وبعض السحب لن تتلاشى اليوم"

**مثال ٢٣ :** أوجد فى ابسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

1. $(\forall x, p(x)) \wedge (\exists y : q(y))$

2. $(\exists x : p(x)) \vee (\forall y, q(y))$

3. $(\exists x : p(x)) \rightarrow (\forall y, q(y))$

4. $\forall x, \exists y : p(x) \vee q(y)$

5. $\exists y : \exists x : p(x) \wedge \sim q(y)$

**الحل :**

١ - حيث أن $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ أذن

$$\sim((\forall x, p(x)) \wedge (\exists y : q(y))) \equiv \sim(\forall x, p(x)) \vee \sim(\exists y : q(y))$$
$$\equiv (\exists x : \sim p(x)) \vee (\forall y, \sim q(y))$$

٢ - حيث أن $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ أذن

$$\sim((\exists x : p(x)) \vee (\forall y, q(y))) \equiv \sim(\exists x : p(x)) \wedge \sim(\forall y, q(y))$$
$$\equiv (\forall x, \sim p(x)) \wedge (\exists y : \sim q(y))$$

٣ - حيث أن $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ أذن

$$\sim((\exists x : p(x)) \rightarrow (\forall y, q(y))) \equiv (\exists x : p(x)) \wedge \sim(\forall y, q(y))$$
$$\equiv (\exists x : p(x)) \wedge (\exists y : \sim q(y))$$

٤ -

$$\sim(\forall x, \exists y : p(x) \vee q(y)) \equiv \exists x : \sim(\exists y : p(x) \vee q(y))$$
$$\equiv \exists x : \forall y, \sim(p(x) \vee q(y))$$
$$\equiv \exists x : \forall y, \sim p(x) \wedge \sim q(y)$$

٥ -

$$\sim(\exists y : \exists x : p(x) \wedge \sim q(y)) \equiv \forall y, \sim(\exists x : p(x) \wedge \sim q(y))$$
$$\equiv \forall y, \forall x, \sim(p(x) \wedge \sim q(y))$$
$$\equiv \forall y, \forall x, \sim p(x) \vee q(y)$$

من نظرية ديمورجان

$$\sim(\forall x\ ,\ p(x)) \equiv \exists x : \sim p(x)$$

أذن لإثبات أن التقرير $\forall x\ ,\ p(x)$ خطأ نحاول إثبات ان التقرير $\exists x : \sim p(x)$ صواب أى نحاول إثبات انه يوجد على الأقل عنصر $x_0$ يحقق ان $\sim p(x_0)$ صواب وبالتالى $p(x_0)$ خطأ، مثل هذا العنصر $x_0$ يسمى مثالا عكسيا Counter Example للتقرير $\forall x\ ,\ p(x)$ وهذه تمثل طريقة من طرق البرهان، وسوف نتناولها بالتفصيل فى الفصل السادس.

مثال ٢٤ : نفرض التقرير $\forall x\ ,\ |x| \neq 0$ حيث مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية.

هذا التقرير خطأ لان العدد 0 يعتبر مثالا عكسيا حيث $|0| \neq 0$ يمثل تقرير خطأ.

مثال ٢٥ : نفرض المجموعة $B=\{2,3,\ ...\ ,9\}$ . أعطى مثالا عكسيا أن امكن لكل من التقارير الآتية :

1- $\forall\ x \in B\ ,\ x+4 \le 10$

2- $\forall\ x \in B\ ,\ x^2 > 2$

3- $\forall\ x \in B\ ,\ 6x+4 < x^2$

4- $\forall\ x \in B$ , $x$ عدد أولى

5- $\forall\ x \in B$ , $x$ عدد زوجى

الحل :

١ - إذا كان $x_0 \in \{7, 8, 9\}$ فإن المتباينة $x_0 + 4 \le 10$ تكون غير متحققة، أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 7$ أو $x_0 = 8$ أو $x_0 = 9$ .

٢ - التقرير $\forall\ x \in B\ ,\ x^2 > 2$ صواب . أذن لا يوجد مثال عكسى .

٣ - إذا كان $x_0 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ فإن المتباينة $6x_0 + 4 < x_0^2$ تكون غير متحققة . أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 2$ .

٤ - إذا كان $x_0 \in \{4, 6, 8, 9\}$ فإن التقرير "$\forall\ x \in B$ , $x$ عدد أولى" يكون خطأ. أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 4$ .

٥ - إذا كان $x_0 \in \{3, 5, 7, 9\}$ فإن التقرير "$\forall\ x \in B$ , $x$ عدد زوجى" يكون خطأ. أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 3$ .

### ٤ - الدوال الافتراضية فى اكثر من متغير

نفرض المجموعتان $A_1$ , $A_2$ . الدالة الافتراضية (فى متغيرين ) لمجموعة حاصل الضرب الديكارتى $A_1 \times A_2$ هى جملة مفتوحة يرمز لها $p(x,y)$ وتحقق الخاصية "لكل $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ فإن $p(a_1, a_2)$ يكون تقرير له قيمة حقيقة صواب أو خطأ."

مثال ٢٦ :

١ - نفرض أن $A_1$ مجموعة من الأولاد وان $A_2$ مجموعة من البنات. أذن "$x$ أخ $y$" تمثل دالة افتراضية للمجموعة $A_1 \times A_2$ .

٢ - نفرض $N$ مجموعة الأعداد الطبيعية. أذن "$2x + y < 6$" تمثل دالة افتراضية فى متغيرين $p(x, y)$ للمجموعة $N \times N$ . ولإيجاد مجموعة الصواب للدالة $p(x, y)$ نلاحظ أن المتباينة $2x + y < 6$ تكون صواب فى الحالات الآتية:

$x = 1$ , $y = 1$
$x = 1$ , $y = 2$
$x = 2$ , $y = 1$

أذن مجموعة الصواب تكون

$$T_p = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

وبوجه عام :

للمجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ فإن الدالة الافتراضية (فى n من المتغيرات) للمجموعة $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ يرمز لها $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وتحقق الخاصية

"لكل $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ فإن $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ يكون تقرير له قيمة حقيقة صواب أو خطأ"

مثال ٢٧ : نفرض N مجموعة الأعداد الطبيعية. أذن " $x + 2y + 3z < 9$ " تمثل دالة افتراضية فى ثلاث متغيرات $p(x, y, z)$ للمجموعة $N \times N \times N$. ولإيجاد مجموعة الصواب للدالة $p(x, y, z)$ نلاحظ أن المتباينة $x + 2y + 3z < 9$ تكون صواب فى الحالات الآتية:

$x = 1$ , $y = 1$ , $z = 1$
$x = 1$ , $y = 2$ , $z = 1$
$x = 2$ , $y = 1$ , $z = 1$
$x = 3$ , $y = 1$ , $z = 1$

أذن مجموعة الصواب تكون

$$T_p = \{(1,1,1), (1,2,1), (2,1,1), (3,1,1)\}$$

ملاحظة :

الدالة الافتراضية المسبوقة بمقياس (شامل أو وجود) لكل متغير فيها تكون تقرير له قيمة حقيقة.

فمثلا إذا كان $p(x,y)$ دالة افتراضية فى $A_1 \times A_2$ فإن

$$\forall x, \exists y : p(x, y)$$

يقرأ

"لكل $x \in A_1$ يوجد $y \in A_2$ بحيث أن $p(x,y)$ صواب"

ويمثل تقرير له قيمة حقيقة، بينما إذا كان $p(x,y)$ مسبوقة بمقياس لمتغير واحد فإنها تكـون دالة افتراضية للمتغير الآخر، فمثلا

$$\exists y : p(x, y) \quad .$$

تمثل دالة افتراضية للمتغير $y$ . وبتطبيق نظرية ديمورجان يمكن نفى تقارير تحتوى على مقـاييس متعددة.

مثال ٢٨ : نفرض

$$A_1 = \{\text{احمد ، حسن ، محمود}\}$$

$$A_2 = \{\text{سعاد ، مريم}\}$$

ونفرض الدالة الافتراضية $p(x,y)$ للمجموعة $A_1 \times A_2$ هى "$x$ أخ $y$". أذن التقرير

$$\forall x \in A_1, \exists y \in A_2 : p(x, y)$$

يقرأ

"لكل $x \in A_1$ يوجد $y \in A_2$ بحيث أن $x$ أخ $y$"

أى إن لكل عنصر فى $A_1$ يوجد أخ إما لسعاد أو مريم ونفى هذا التقرير يكون كالآتى :

$$\sim \left( \forall x, \exists y : p(x, y) \right) \equiv \exists x : \sim \left( \exists y : p(x,y) \right)$$

$$\equiv \exists x : \forall y, \sim p(x, y)$$

أى إن نفى التقرير يكون "يوجد على الأقل رجل ليس أخ لأى من النساء"

مثال ٢٩ : نفرض أن $\{1, 2, 3\}$ هى مجموعة التعويض. حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

$$1 - \quad \exists x : \forall y, \quad x^2 < y + 1$$
$$2 - \quad \forall x, \exists y : \quad x^2 + y^2 < 12$$
$$3 - \quad \forall x, \forall y, \quad x^2 + y^2 < 12$$
$$4 - \quad \exists x : \forall y, \exists z : \quad x^2 + y^2 < 2z^2$$
$$5 - \quad \exists x : \exists y : \forall z, \quad x^2 + y^2 < 2z^2$$

الحل :

١ - صواب : بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 < y + 1$ متحققة لجميع قيم $y \in \{1, 2, 3\}$ .

٢ - صواب : لكل $x_0 \in \{1, 2, 3\}$ بأخذ $y = 1$ فإن المتباينة $x_0^2 + 1 < 12$ تكون متحققة.

٣ - خطأ : بأخذ $y_0 = 2$ , $x_0 = 3$ فإن $x_0^2 + y_0^2 = 9 + 4 = 13$ أى إن المتباينة $x_0^2 + 1 < 12$ تكون غير متحققة.

٤ - صواب : بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 + y^2 < 2z^2$ تكون متحققة لجميع قيم $y, z \in \{1, 2, 3\}$ .

٥ - خطأ : بأخذ $z_0 = 1$ فإنه لا يوجد $x_0$ أو $y_0$ فى المجموعة $\{1, 2, 3\}$ بحيث يحقق المتباينة $x^2 + y^2 < 2$ .

مثال ٣٠ : نفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . فى كل مما يأتى وضح ما إذا كانت الجملة تمثل تقرير أو دالة افتراضية وإذا كانت الجملة تمثل تقرير أوجد قيمة الحقيقة وإذا كانت تمثل دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

$$1 - \quad \forall x \in A, \exists y \in A : \quad x + y < 8$$
$$2 - \quad \forall y \in A, \quad x + y < 8$$
$$3 - \quad \forall x \in A, \forall y \in A, \quad x + y < 8$$
$$4 - \quad \exists x \in A : \quad x + y < 8$$
$$5 - \quad \exists x \in A : \forall y \in A, \quad x + y > 5$$

الحل :

١ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياسين. أذن هى تمثل تقرير، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه لكل $x \in A$ يوجد $y \in A$ ( مثلا $y = 1$ ) بحيث أن $x + 1 < 8$ متحققة وبالتالى قيمة الحقيقة للتقرير هى صواب .

٢ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياس واحد فقط للمتغير y. أذن هى تمثل دالة افتراضية للمتغير الآخر x ، ولإيجاد مجموعة الصواب نلاحظ ان لكل $y \in A$ فإن $x_0 + y < 8$ فقط إذا كان $x_0 = 1$ وبالتالى فإن مجموعة الصواب تكون $\{1\}$ .

٣ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياسين. أذن هى تمثل تقرير، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه بأخذ $y_0 = 5$ , $x_0 = 6$ فإن $x_0 + y_0 = 6 + 5 = 11$ أى إن المتباينة $x_0 + y_0 < 8$ غير متحققة وبالتالى قيمة الحقيقة للتقرير هى خطأ.

٤ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياس واحد فقط للمتغير x . أذن هى تمثل دالة افتراضية للمتغير الآخر y ، ولإيجاد مجموعة الصواب نلاحظ انه بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 + y < 8$ تتحقق لكل $y \in A$ وبالتالى فإن مجموعة الصواب تكون هى المجموعة A نفسها.

٥ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياسين . أذن هى تمثل تقرير ، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه يوجد $x \in A$ (مثلا $x = 6$ ) بحيث أن لكل $y \in A$ يتحقق ان $6 + y > 5$ وبالتالى قيمة الحقيقة للتقرير هى صواب.

مثال ٣١ : أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

1 – $\exists x : \forall y , p(x , y)$

2 – $\forall x , \forall y , p(x , y)$

3 – $\exists y : \exists x : \forall z , p(x , y, z)$

$4-\ \exists x : \forall y ,\ \big( p(x\ ,\ y) \to q(x,y) \big)$

$5-\ \exists z : \forall x , \exists y : \big( p(x\ ,y\ ,z) \vee q(x\ ,y\ ,z) \big)$

الحل :

$$1-\ \sim \big( \exists x : \forall y\ ,\ p(x\ ,\ y) \big) \equiv \forall x , \sim \big( \forall y\ ,\ p(x\ ,\ y) \big)$$
$$\equiv \forall x , \exists y : \sim p(x,y)$$

$$2-\ \sim \big( \forall x\ ,\ \forall y\ ,\ p(x\ ,\ y) \big) \equiv \exists x : \sim \big( \forall y\ ,\ p(x,y) \big)$$
$$\equiv \exists x : \exists y : \sim p(x,y)$$

$$3-\ \sim \big( \exists y : \exists x : \forall z\ ,\ p(x,y,z) \big) \equiv \forall y\ , \sim \big( \exists x : \forall z , p(x,y,z) \big)$$

$$\equiv \forall y , \forall x , \sim \big( \forall z , p(x,y,z) \big)$$
$$\equiv \forall y , \forall x ,\ \exists z : \sim p(x,y,z)$$

$$4-\ \sim \big( \exists x : \forall y , \big( p(x,y) \to q(x,y) \big) \big) \equiv \forall x , \sim \big( \forall y , \big( p(x,y) \to q(x,y) \big) \big)$$

$$\equiv \forall x , \exists y : \sim \big( p(x,y) \to q(x,y) \big)$$
$$\equiv \forall x , \exists y : p(x,y) \wedge \sim q(x,y)$$

$$5-\ \sim \big( \exists z : \forall x , \exists y : \big( p(x\ ,\ y\ ,z) \vee q(x\ ,y\ ,z) \big) \big)$$
$$\equiv \forall z , \exists x : \forall y , \sim \big( p(x,y,z) \vee q(x,y,z) \big)$$
$$\equiv \forall z , \exists x : \forall y , \sim p(x,y,z) \wedge \sim q(x,y,z)$$

مثال ٣٢ : أوجد نفى التقرير " $\forall n\ , n \geq 4 \to 2^n \leq n!$ "

الحل : نفرض التقرير $p$ : " $n \geq 4$ "

التقرير $q$ : " $2^n \leq n!$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $\forall n\ ,\ p \to q$ وحيث أن

$$\sim \big( \forall n\ ,\ p \to q \big) \equiv \exists n : \sim \big( p \to q \big)$$
$$\equiv \exists n : \big( p \wedge \sim q \big)$$

أذن نفى التقرير يكون " $\exists n :\ n \geq 4 \wedge 2^n > n!$ "

مثال ٣٣ : أوجد نفى التقرير

" إذا كان $x \leq x^t$ لكل $t \in (0,1)$ فإن $x \leq 1$ ".

الحل : نفرض

التقرير p : " $x \leq x^t$ لكل $t \in (0,1)$ "

التقرير q : " $x \leq 1$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \rightarrow q$

وحيث أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$
$$\equiv \left(\forall t \in (0,1)\ ,\ x \leq x^t\right) \wedge (x > 1)$$

أذن نفى التقرير يكون

" $x \leq x^t$ لكل $t \in (0,1)$ و أيضا $x > 1$ ".

مثال ٣٤ : أوجد نفى التقرير

"إذا كانت المتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد $\ell$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0$ بحيث أن $n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ "

الحل : نفرض

التقرير p : " المتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد $\ell$ "

التقرير q : " $\forall \varepsilon > 0 , \exists\ n_0 : n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \rightarrow q$

وحيث أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \qquad ,$$
$$\sim q \equiv \sim\left(\forall \varepsilon > 0 , \exists\ n_0 : n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon\right)$$
$$\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall\ n_0\ ,\ \sim\left(n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon\right)$$
$$\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall\ n_0\ ,\ \left(n \geq n_0 \wedge |a_n - \ell| \geq \varepsilon\right)$$

أذن نفى التقرير يكون

" المتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد $\ell$ ويوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل $n_0$ فـإن $n \geq n_0$ وأيضا $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$ "

مثال ٣٥ : أوجد نفى التقرير

" إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

الحل : نفرض

التقرير $p$ : " الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ "

التقرير $q$ : " $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \rightarrow q$

وحيث أن

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad ,$$

$$\begin{aligned} \sim q &\equiv \sim \left( \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \\ &\equiv \exists \varepsilon>0 : \forall \delta>0, \sim \left( |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \\ &\equiv \exists \varepsilon>0 : \forall \delta>0, \left( |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right) \end{aligned}$$

أذن نفى التقرير المعطى يكون

" الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ ويوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل $\delta > 0$ فإن $|x - x_0| < \delta$ وأيضا $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ ".

مثال ٣٦ : أوجد نفى التقرير

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, \left( n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon \right)$$

الحل :

$$\begin{aligned} &\sim \left( \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, \left( n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon \right) \right) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \exists n, \sim \left( n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon \right) \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \exists n, \left( n > n_0 \wedge |a_n| \geq \varepsilon \right) \end{aligned}$$

# تمارين الفصل الرابع

١ – نفرض أن $p(x)$ ترمز إلى الجملة " $x^2 + 3 > 7$ ". حدد ما إذا كانت $p(x)$ تمثل دالة افتراضية لكل من المجموعات الآتية وإذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

١ ) مجموعة الأعداد الطبيعية $N$ .

٢ ) مجموعة الأعداد الصحيحة $I$ .

٣ ) مجموعة الأعداد الحقيقية $R$ .

٤ ) مجموعة الأعداد المركبة $C$ .

٥ ) المجموعة $A$ حيث $A = \{0, 1\}$ .

٦ ) المجموعة $A$ حيث $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

٧ ) المجموعة $A$ حيث $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .

٨ ) الفترة المفتوحة $(1, 4)$ .

٩ ) الفترة المغلقة $[a, b]$ حيث $0 < a < b < 1$ .

١٠) الفترة المغلقة $[a, b]$ حيث $-3 < a < b < 3$ .

٢ – أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية ثم عبر عن كل منها فى صورة إنشائية :

1) $(\forall\ n \in N)(n + 1 \geq 2)$

2) $\exists\, x \in R : x^2 + 1 = 0$

3) $(\forall\ n \in I)(n^2 - 1 > 0)$

4) $\exists\ n \in N\ :\ 50 \leq n^2 < 100$

5) $\forall\, x \in (0,1]\ ,\ x^2 < 1$

6) $\forall x \in (0,1] \; , \; x^2 \le 1$

7) $\exists \; n \in N \; : \; \left(n^2 - 30 > 0\right) \wedge \left(n^4 < 60\right)$

8) $\exists \; n \in N \; : \; \left(n^2 \le 20\right) \wedge \left(n > 3\right)$

9) $\forall \; n \in \{1,2,3,4,5\} \, , \; \left(n^2 \le 21\right) \vee \left(n^3 > 60\right)$

10) $\forall \; n \in \{1,2,3,4,5\} \, , \; n^2 \le 10 \; \rightarrow \; n^3 < 30$

٣ – فى كل من التقارير الآتية حدد نوع المقياس ( شامل – وجود ) وأوجد نفى التقرير ثم اعد صياغة التقرير ونفيه فى صورة رمزية :

١ ) لكل مجتهد نصيب .

٢ ) يوجد بعض الطلاب لا يستخدمون الكومبيوتر .

٣ ) جميع مقررات الرياضيات شيقة ويمكن فهمها بسهولة .

٤ ) كل الأعداد الفردية تقبل القسمة على 3 أو 5 .

٥ ) بعض الأعداد الأولية تكون أعداد زوجية .

٦ ) يوجد حل للمعادلة $x^2+1=0$ فى مجموعة الأعداد المركبة .

٧ ) من نقطة خارج مستقيم معلوم يوجد مستقيم يمر بالنقطة ويوازى المستقيم المعلوم.

٨ ) كل زاويتان متتامتان مجموعها يساوى قائمة .

٩ ) منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعها فى نقطة واحدة .

١٠) الدالة الآسية $e^x$ دالة موجبة لجميع قيم $x$ الحقيقية .

٤ – بفرض أن مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية R،حدد قيمة الحقيقة فى كل من التقارير الآتية :

1 - $\forall x \; , \; |x| = |-x|$

2 - $\forall x \; , \; x - 2 > 0$

3 - $\exists x \; : \log(x) < 0$

4 - $\exists x \; : \log(x) = e^x$

5- $\exists x : x^2 = x$

6- $\exists x : x^2 + 6 < 0$

7- $\exists x : x + 1 \geq 0$

8- $\forall x , e^x > 0$

9- $\exists x : e^x \leq 0$

10- $\forall x , x > 7 \rightarrow x > 2$

وبفرض أن مجموعة التعويض هى الفترة المغلقة $A = [-1, 1]$ ، حدد قيمة الحقيقـــة فى كل من التقارير المعطاة.

٥ - أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

١) جميع الطلاب مجتهدون ولكل مجتهد نصيب .

٢) كل الطلاب يستخدمون الكومبيوتر ولكن بعضهم لا يصممـــون برامـــج بلغـــات الكومبيوتر.

٣) الشرط الضرورى لتلاشى كل السحب اليوم هو سقوط بعض الأمطار .

٤) الأعداد الأولية جميعها أعداد فردية إذا كان العدد 2 عدد غير أولى .

٥) جميع الأعداد الأولية إما تقبل القسمة على الواحد الصحيح أو على نفسها .

٦ - أوجد فى ابسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

1- $\left(\forall x , p(x)\right) \wedge \left(\forall y , \sim q(y)\right)$

2- $\left(\exists x : p(x)\right) \vee \left(\exists y : q(y)\right)$

3- $\left(\forall x , p(x)\right) \rightarrow \left(\exists y : q(y)\right)$

4- $\forall x , \exists y : \sim p(x) \vee q(y)$

5- $\exists y : \forall x , \sim\left(p(x) \wedge \sim q(y)\right)$

٧ – نفرض المجموعة $B = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$ . اعطى مثالا عكسيا أن أمكن لكل من التقارير الآتية :

1- $\forall\ x \in B \quad , \quad x - 4 > 0$

2- $\forall\ x \in B \quad , \quad x^2 \leq 2^x$

3- $\forall\ x \in B \quad , \quad 5x + 1 \geq x^2$

4- $\forall\ x \in B$ , x عامل من عوامل العدد 16

5- $\forall\ x \in B$ , x عدد زوجى

٨ – نفرض أن $\{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$ هى مجموعة التعويض. حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

1 – $\exists\ x : \forall\ y\ ,\ x + 1 < y$

2 – $\forall\ x , \exists\ y :\ x^2 + y < 18$

3 – $\forall\ x , \forall\ y\ ,\ x^2 + y^2 \geq 3$

4 – $\exists\ x : \forall\ y\ ,\ \forall\ z\ ,\ x^2 + y^2 \leq 3z^2$

5 – $\forall\ x : \exists\ y :\ \forall\ z\ ,\ x^2 + y^2 > 2z^2$

٩ – نفرض أن $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$ . فى كل مما يأتى وضح ما إذا كانت الجملة تمثل تقرير أو دالة افتراضية وإذا كانت الجملة تمثل تقرير أوجد قيمة الحقيقة وإذا كانت تمثل دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

1 – $\forall\ x \in A\ ,\ \exists\ y \in A :\ x + 2y < 10$

2 – $\exists\ y \in A\ :\ 3x + y < 7$

3 – $\exists\ x \in A\ :\ \forall\ y \in A\ ,\ x + y < 6$

4 – $\forall\ x \in A\ :\ x^2 - y \geq 0$

5 – $\exists\ x \in A\ :\ \forall\ y \in A\ ,\ x^2 + y^2 > 5$

١٠ - أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

1- $\exists x : \forall y , \sim p(x,y)$

2- $\forall x , \exists y : p(x,y) \vee q(x,y)$

3- $\forall y , \exists x : \forall z , p(x,y,z)$

4- $\forall x , \forall y , \left( p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

5- $\exists z : \forall x , \exists y : \left( \sim p(x,y,z) \wedge q(x,y,z) \right)$

6- $\left( \exists x : \forall y , \sim p(x,y) \right) \wedge \left( \forall x , \forall y , q(x,y) \right)$

7- $\left( \forall x , \exists y : p(x,y) \right) \rightarrow \left( \forall x , \exists y : q(x,y) \right)$

8- $\left( \forall x , \exists y : p(x,y) \right) \vee \left( \exists x : \exists y : p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

9- $\left( \forall x , \exists y : p(x,y) \right) \rightarrow \left( \exists x : \forall y , p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

10- $\left( \exists x : \exists y , p(x,y) \right) \vee \left( \forall x , \forall y , p(x,y) \wedge q(x,y) \right)$

١١ - استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير مكافئ فى كل من التقارير الآتية :

1- $\left( \forall x , p(x) \right) \wedge \left( \forall y , \sim q(y) \right)$

2- $\left( \exists x : p(x) \right) \vee \left( \exists y : q(y) \right)$

3- $\left( \exists x , \sim p(x) \right) \wedge \left( \forall x , \sim q(x) \right)$

4- $\left( \exists x : \sim p(x) \right) \rightarrow \left( \forall x , q(x) \right)$

5- $\left( \forall x , p(x) \right) \rightarrow \left( \exists x : q(x) \right)$

6- $\left( \exists x : \forall y , \sim p(x,y) \right) \wedge \left( \forall x , \forall y , q(x,y) \right)$

7- $\sim \left( \left( \exists x : \forall y , p(x,y) \right) \rightarrow \left( \forall x , \exists y : \sim q(x,y) \right) \right)$

8- $\left( \forall x , \exists y : p(x,y) \right) \vee \left( \exists x : \exists y : p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

9- $\left( \forall x , \forall y , p(x,y) \right) \rightarrow \left( \exists x : \forall y , \sim p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

10- $\left( \forall x , \exists y , p(x,y) \right) \wedge \left( \forall x , \forall y , p(x,y) \vee \sim q(x,y) \right)$

١٢ – أوجد نفى وعكس ومقلوب ومضاد كل من التقارير الآتية :

١ ) الدالة $f(x)$ تكون دالة تصاعدية إذا كان لكل $x , y$ حيث $x \leq y$ فإن $f(x) \leq f(y)$ .

٢ ) إذا قطع مستقيم مستقيمان متوازيان فإن كل زاويتان متبادلتان متساويتان فى القياس وكل زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس.



الفصل



# الأسباب المنطقية

# Logical Reasoning

كثير من الحجج ( القضايا ) التى نتعامل معها فى حياتنا تكون بحاجة إلى إثبات وبـــدون تقـــديم الإثبات تبقى مثل هذه الحجج مجرد ادعاءات معلقة إلى أن يتم إثبات صحتها أو إثبات عـــــدم صحتها، ومن الأهداف الأساسية للمنطق هو الاهتمام بإثبات صحة الحجج وكذلك الاهتمـــام بوضع الإثبات فى خطوات منظمة دون غموض أو إبهام، فأحيانا نتعامل مع حجـــة ( قضيـــة ) صحيحة ولكن الإثبات الذى وضع لها مبهم ولا يفى بالغرض. وأحيانا نسمع بعض الكلمـــات مثل "التفكير المنطقى –الإثبات المنطقى" أو نسمع من يصف شخصا بقوله

- انه يتحدث بطريقة منطقية
- انه يفكر بطريقة غير منطقية
- انه يفكر بطريقة منطقية

وربما يتساءل البعض " ما المقصود بالطريقة المنطقية ؟ "
وهذا ما سنجيب ونركز عليه فى دراستنا لهذا الفصل .

## ١ – الحجة ( الإثبات ) Argument ( Proof )

تعريف ١ : الحجة **Argument** (أو الإثبات **Proof** ) تتكون من جزئين أساسيين، الجـــزء الأول يمثل مجموعة من التقارير المعطـــاة $S_1 , S_2 , \ldots , S_n$ تســـــمى معطيات الحجة أو مقدمات منطقية **premises** وهذه المقدمات تـــؤدى إلى الجـــزء الثانى وهو تقرير آخر يسمى النتيجة أو الاستنتاج **conclusion** ، ومثـــل هـــذه الحجة سيرمز لها بالصورة $S_1 , S_2 , \ldots , S_n \; \alpha \; S$ حيث الرمز $\alpha$ يعنى " يؤدى إلى " .

ونلاحظ من التعريف أن الحجة تمثل تقرير، ولذلك فإن الحجة لها قيمة حقيقة وإذا كانت قيمة الحقيقة صواب فإن الحجة تسمى حجة ملزمة **valid** وبمعنى آخر نقول ان الإثبات منطقي، وإذا كانت قيمة الحقيقة خطأ فإن الحجة تسمى حجة غير ملزمة **invalid** وبمعنى آخر نقول ان الإثبات غير منطقي، أي إن

الحجة تكون ملزمة إذا كانت المقدمات تؤدى إلى الاستنتاج بشكل منطقى .

ولتحديد أن الحجة ملزمة

نربط المقدمات المنطقية للحجة معا بواسطة أداة الوصل **conjunction** والتقرير المركب الناتج يستخدم كمقدمة **antecedent** لتقرير من نوع الشرطية **conditional** "إذا كان . . . فإن . . . " واستنتاج الحجة يمثل النتيجة **consequent** للشرطية، وإذا كانت الشرطية صائبة منطقيا **tautology** فهذا يعنى أن الحجة ملزمة إما إذا كانت الشرطية غير صائبة منطقيا فهذا يعنى أن الحجة غير ملزمة.

وعند تكوين التقرير الشرطى يراعى استخدام الأقواس فى التقارير التى تحتوى على اكثر من رمز وذلك منعا لحدوث أى أخطاء فى فهم التقرير الشرطى .

تعريف ٢ : الحجة (أو الإثبات) $S_1 , S_2 , \ldots , S_n \ \alpha \ S$ تكون ملزمة إذا كان التقرير المركب $( S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_n ) \rightarrow S$ صائب منطقيا **tautology** وفى هذه الحالة نقول ان الإثبات منطقى.

ويمكن تحديد إلزامية الحجة بأكثر من طريقة كما سنوضح بالأمثلة الآتية :

مثال ١ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا كان الشكل المعطى مربع فإنه يكون مستطيل .

الشكل المعطى مربع .

أذن الشكل المعطى يكون مستطيل .

الحل : نفرض التقارير

p : الشكل المعطى مربع

q : الشكل المعطى مستطيل

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$S_1 : p \rightarrow q$$
$$S_2 : p$$
$$\overline{\hspace{3cm}}$$
$$S : q$$

التقريران $S_2$ , $S_1$ اعلى الخط يرمزان إلى المقدمات المنطقية والتقرير S الموجود اسفل الخط يرمز إلى الاستنتاج.

الطريقة الأولى :

بربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

المقدمات المنطقية — الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة للتقرير الشرطى $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

| p | q | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \wedge p$ | $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | F | T |



نلاحظ من العمود الأخير بالجدول ان التقرير الشرطى $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة. ومن جدول الحقيقة نلاحظ ما يأتى:

١ – الحجة الملزمة يمكن أن يكون لها استنتاج صواب أو خطأ ، أى إن

"صواب أو خطأ الاستنتاج للحجة لا يحدد إلزامية الحجة"

وأيضا

" إلزامية الحجة لا تضمن أن يكون استنتاجها صواب"

وهذا واضح من الجدول حيث نجد ان الاستنتاج q خطأ فى حالات (الصفــــوف ٢، ٤) بينمـــا الحجة ملزمة .

٢ – إذا كانت المقدمات المنطقية للحجة صواب فإنه لكى تكون الحجة ملزمة يجب أن يكــون الاستنتاج صواب، واعتمادا على هذا فانه يمكن حل المثال ( ١) بطريقة ثانية كالآتى:

**الطريقة الثانية :**

نكون جدول الحقيقة لكل من المقدمات المنطقية والاستنتاج

المقدمات المنطقية

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

الاستنتاج

وفى الجدول نبحث عن جميع الحالات التى يكون فيها المقدمات المنطقية صواب معـاً ثم ننظر إلى النتيجة فى هذه الحالات فإذا كانت النتيجة صواب فإن الحجة تكون ملزمــة. وفى هذا المثال نلاحظ من الجدول أن المقدمات المنطقية $p$ , $(p \rightarrow q)$ صــــواب معا فى حالة واحدة فقط بالصف الأول ويكون عندها الاستنتاج q صواب أيضـــــا فى الصف الأول وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة، ومن ذلك يمكننا القول

**إذا كان لدينا حجة جميع مقدماتها المنطقية صواب بينما الاستنتاج خطأ فإن الحجة تكون غير ملزمة**

**تعريف ٣:** الحجة $S_1 , S_2 , \ldots , S_n \alpha \quad S$ تكون غير ملزمة إذا استطعنا إيجاد حالة واحدة على الأقل تأخذ فيها جميع المقدمات المنطقية القيمة صواب بينما يأخذ الاستنتاج القيمة خطأ.

**مثال ٢ :** حدد بطريقتين مختلفتين ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان .

الطالب نجح فى الامتحان .

أذن الطالب فهم الرياضيات .

**الحل :** نفرض التقارير

$p$ : الطالب فهم الرياضيات

$q$ : الطالب نجح فى الامتحان

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$\begin{array}{l} S_1 : p \rightarrow q \\ S_2 : q \\ \hline S : p \end{array}$$

**الطريقة الأولى :**

بربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

المقدمات المنطقية          الاستنتاج

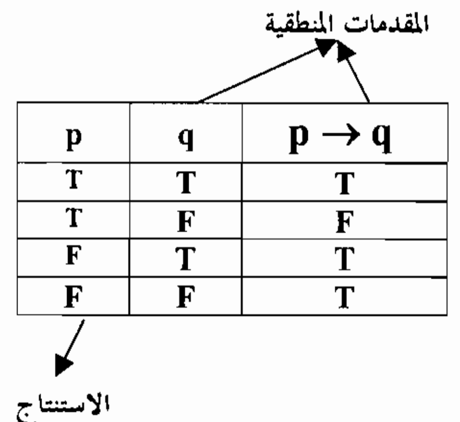
وبتكوين جدول الحقيقة

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $q$ | $\rightarrow$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | F | F | F | T | T |
| F | T | F | T | T | T | T | F | F |
| F | F | F | T | F | T | F | T | F |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 1 |

ومن الجدول بالخطوة رقم 5 يتضح أن التقريـــــر الشـــرطى $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$ غير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون غير ملزمة.

الطريقة الثانية :

نكون جدول الحقيقة لكل من المقدمات المنطقية والاستنتاج




| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

وفى الجدول نبحث عن جميع الحالات التى يكون فيها المقدمات المنطقية صواب معا ثم ننظـر إلى النتيجة فى هذه الحالات فإذا استطعنا أيجاد حالة واحدة على الأقل تأخذ فيها جميع المقدمـــات المنطقية القيمة صواب بينما يأخذ الاستنتاج القيمة خطأ فإن الحجة تكون غير ملزمـــة. ومـــن الجدول نلاحظ أن المقدمات المنطقية لا تؤدى إلى الاستنتاج فى جميع الحالات، فمثلا فى الصـف الأول المقدمات المنطقية $q$ , $p \rightarrow q$ صواب والاستنتاج $p$ صواب أيضا، ولكـــن فى الصف الثالث المقدمات المنطقية $q$ , $p \rightarrow q$ صواب بينما الاستنتاج $p$ خطأ وبالتـلى فإن الحجة تكون غير ملزمة.

مثال ٣ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان .

الطالب لم ينجح فى الامتحان .

أذن الطالب لم يفهم الرياضيات .

الحل : نفرض التقارير

p : الطالب فهم الرياضيات

q : الطالب نجح فى الامتحان

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$S_1 : p \rightarrow q$

$S_2 : \sim q$

---

$S : \sim p$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$





المقدمات المنطقية    الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة

| p | q | (p → | | q) | ∧ | ~ | q | → | ~ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | F | F | T | T | F | T |
| T | F | T | F | F | F | T | F | T | F | T |
| F | T | F | T | T | F | F | T | T | T | F |
| F | F | F | T | F | T | T | F | T | T | F |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 5 | 4 | 2 | 7 | 6 | 1 |

↑

ومن الجدول نلاحظ من العمود فى الخطوة رقم 7 أن التقرير الشرطى $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة.

ونأتى الآن إلى السؤال التالى :

**إذا كان واحد أو اكثر من المقدمات المنطقية خطأ وكذلك الاستنتاج خطأ فهل يمكن أن تكون الحجة ملزمـــة ؟**

وللتعرف على إجابة لهذا السؤال نناقش المثال الآتى :

مثال ٤ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا كان مجموع زوايا المثلث 300 درجة فإن $1 = 2$ .

مجموع زوايا المثلث 300 درجة .

أذن $1 = 2$ .

الحل : نفرض التقارير

$p$ : مجموع زوايا المثلث 300 درجة

$q$ : $1 = 2$

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

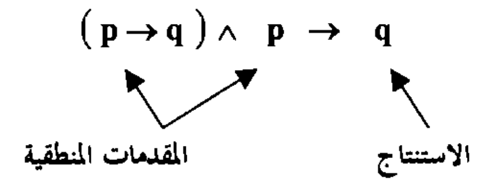
$S_1$ : $p \rightarrow q$

$S_2$ : $p$

---

$S$ : $q$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح



وبتكوين جدول الحقيقة

| p | q | $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $p$ | $\rightarrow$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | F | F | T | T | F |
| F | T | F | T | T | F | F | T | T |
| F | F | F | T | F | F | F | T | F |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 1 |

$\uparrow$

ومن الجدول نلاحظ من العمود فى الخطوة رقم 5 أن التقرير الشرطى $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة. والحجة المعطاة فى مثال ( ٤ ) توضح لنا قاعدة أساسية فى المنطق تسمى قانون الانفصال **law of detachment** حيث نجد فى هذا المثال حجة ملزمة على الرغم من أن أجزاء من المقدمات المنطقية خطأ، فالتقرير "مجموع زوايا المثلث 300 درجة" خطأ وكذلك الاستنتاج والذى يمثله التقرير " 1 = 2 " هو خطأ أيضا وبالرغم من ذلك الحجة ملزمة، وهنا نؤكد على قاعدة هامة فى المنطق وهى

**يوجد فرق بين إلزامية الحجة وحقيقتها ، فالحجة تكون ملزمة بسبب الطريقة المنطقية التى نحصل بها على الاستنتاج من المقدمات المنطقية وليس بسبب صحة أو معنى التقارير الموجودة بالحجة.**

مثال ٥ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

المدرسة مغلقة أو الطلاب غير حاضرون .

الطلاب غير حاضرون .

أذن المدرسة ليست مغلقة .

الحل : نفرض $p$ يرمز إلى التقرير "المدرسة مغلقة "، $q$ يرمز إلى التقرير "الطلاب حاضرون"

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$S_1 : p \vee \sim q$$
$$S_2 : \sim q$$
$$\overline{\phantom{xxxxxxxx}}$$
$$S : \sim p$$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \vee \sim q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$$

المقدمات المنطقية      الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة

| p | q | (p | ∨ | ~ | q) | ∧ | ~ | q | → | ~ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | T | F | F | T | T | F | T |
| T | F | T | T | T | F | T | T | F | F | F | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F | T | T | T | F |
| F | F | F | T | T | F | T | T | F | T | T | F |
| 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 5 | 3 | 2 | 7 | 6 | 1 |

ومن الجدول نلاحظ من العمود فى الخطوة رقم 7 أن التقرير الشرطى

$$(p \vee \sim q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$$

غير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون غير ملزمة .

مثال ٦ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

سقوط المطر شرط ضرورى وكاف لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .

المطر يسقط .

أذن الصحراء يتم تعميرها والشباب يجدون فرص عمل جديدة .

الحل : نفرض التقارير

p : المطر يسقط

q : الصحراء يتم تعميرها

r : الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$S_1 \; : \; p \leftrightarrow q$

$S_2 \; : \; q \rightarrow r$

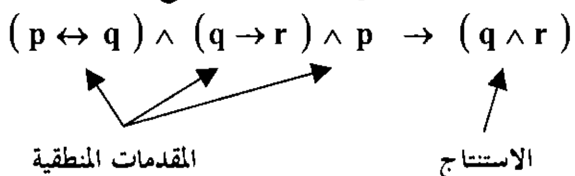
$S_3 \; : \; p$

---

$S \; : \; q \wedge r$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p \rightarrow (q \wedge r)$$




وبتكوين جدول الحقيقة

| p | q | r | ( p | ↔ | q ) | ∧ | ( q | → | r ) | ∧ | p | → | ( q | ∧ | r ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | F | T | F | F | F | T | T | T | F | F |
| T | F | T | T | F | F | F | F | T | T | F | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F | F | F | F | T | F | F | T | T | F | F | F |
| F | T | T | F | F | T | F | T | T | T | F | F | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T | F | T | F | F | F | F | T | T | F | F |
| F | F | T | F | T | F | T | F | T | F | F | F | T | F | F | T |
| F | F | F | F | T | F | T | F | T | F | F | F | T | F | F | F |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 6 | 2 | 5 | 3 | 7 | 1 | 9 | 2 | 8 | 3 |

ومن الجدول بالعمود فى الخطوة 9 يتضح أن التقرير صائب منطقيا وبالتـــالى الحجـــة تكـــون ملزمة.

مثال ٧ : أثبت بطريقتين مختلفتين أن الحجة الآتية ملزمة $(p \to \sim q), (r \to q), r \;\alpha\; \sim p$

الحل :

<u>الطريقة الأولى</u> :بربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \to \sim q) \wedge (r \to q) \wedge r \;\; \to \;\; \sim p$$

المقدمت المنطقية          الاستنتاج

| p | q | r | ( p → | ~ | q ) | ∧ | ( r → | q ) | ∧ | r | → | ~ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | F | T | F | T | T | T | F | T | T | F | T |
| T | T | F | T | F | F | T | F | F | T | T | F | F | T | F | T |
| T | F | T | T | T | T | F | F | T | F | F | F | T | T | F | T |
| T | F | F | T | T | T | F | T | F | T | F | F | F | T | F | T |
| F | T | T | F | T | F | T | T | T | T | T | T | T | T | T | F |
| F | T | F | F | T | F | T | T | F | T | T | F | F | T | T | F |
| F | F | T | F | T | T | F | F | T | F | F | F | T | T | T | F |
| F | F | F | F | T | T | F | T | F | T | F | F | F | T | T | F |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | 4 | 2 | 7 | 3 | 6 | 2 | 8 | 3 | 10 | 9 | 1 |

ومن جدول الحقيقة بالعمود فى الخطوة 10 يتضح أن التقرير صائب منطقيا وبالتالى الحجة تكون ملزمة .

<u>الطريقة الثانية</u> : نكون جدول الحقيقة لكل من المقدمات المنطقية والاستنتاج

المقدمات المنطقية          الاستنتاج

| p | q | r | $p \to \sim q$ | $r \to q$ | $\sim p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | F |
| T | T | F | F | T | F |
| T | F | T | T | F | F |
| T | F | F | T | T | F |
| F | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | T | T |
| F | F | T | T | F | T |
| F | F | F | T | T | T |

وفى الجدول نبحث عن جميع الحالات التى يكون فيها المقدمات المنطقية صواب معا ثم ننظر إلى النتيجة فى هذه الحالات فإذا كانت النتيجة صواب فإن الحجة تكون ملزمة. وفى هذا المثال نلاحظ من الجدول أن المقدمات المنطقية $r$ , $(r \to q)$ , $(p \to \sim q)$ صواب معدلى حالة واحدة فقط بالصف الخامس ويكون عندها الاستنتاج $\sim p$ صواب أيضا فى الصف الخامس وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة.

## ٢ - الحجج والافتراضات Arguments and Propositions

نفرض الافتراضات

$$P(p,q,\dots),\ P_1(p,q,\dots),\ P_2(p,q,\dots),\ \dots,\ P_n(p,q,\dots)$$

ومن تعريف الحجة الملزمة يمكننا القول أن الحجة

$$P_1(p,q,\dots), P_2(p,q,\dots), \dots, P_n(p,q,\dots)\ \alpha\ \ P(p,q,\dots)$$

تكون ملزمة إذا كانت

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow P$$

أى إذا كان التقرير الشرطى $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \to P$ صائب منطقيا.

ووفقا لمفهوم الإحلال يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية ١ : ( المفهوم الأساسى للحجج )

إذا كانت الحجة

$$P_1(p,q,\dots), P_2(p,q,\dots), \dots, P_n(p,q,\dots)\ \alpha\ \ P(p,q,\dots)$$

ملزمة ، اذن لأى تقارير $p', q', \dots$ فإن الحجة

$$P_1(p',q',\dots), P_2(p',q',\dots), \dots, P_n(p',q',\dots)\ \alpha\ \ P(p',q',\dots)$$

تكون أيضا ملزمة .

مثال ٨ : ( قانون الانفصال )

الحجة $(p \to q) , p \;\alpha\; q$ ملزمة ويمكن التحقق من ذلك بأكثر من طريقة

الطريقة الأولى :

بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \to q) \wedge p \;\to\; q$ وقد أثبتنا فى مثال (١) أن هذا التقرير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة.

الطريقة الثانية :

من المعطيات $p$ صواب

$p \to q$ صواب

ومن تعريف الشرطية وحيث أن $p$ صواب أذن $q$ صواب، وهذه الطريقة تعرف باسم البرهان المباشر، وسوف نتعرف عليها بالتفصيل فى طرق البرهان بالفصل السادس .

ومن هذا المثال ووفقا للمفهوم الأساسى للحجج يمكننا القول انه لأى حجة مقدماها المنطقية صواب وتكون على الصورة $p \to q \;,\; p$ فإن الاستنتاج $q$ يكون صواب، فمثلا الحجة

إذا كانت الدالةf قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة.

الدالةf قابلة للتفاضل.

أذن الدالةf متصلة.

تكون على الصورة $(p \to q) , p \;\alpha\; q$ وبالتالى هى حجة ملزمة.

مثال ٩ : الحجة $(p \to q) , \sim q \;\alpha\; \sim p$ ملزمة ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \to q) \wedge \sim q \;\to\; \sim p$ وقد أثبتنا فى مثال (٣) أن هذا التقرير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة، ووفقا للمفهوم الأساسى للحجج يمكننا القول انه لأى حجة مقدماها المنطقية $p \to q \;,\; \sim q$ صواب فإن الاستنتاج $\sim p$ يكون صواب، فمثلا الحجة

إذا كانت الدالةf قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة.

الدالةf غير متصلة.

أذن الدالةf غير قابلة للتفاضل.

تكون على الصورة $(p \to q)\ ,\ \sim q \quad \alpha \quad \sim p$ وبالتالى هى حجة ملزمة.

مثال ١٠ : ( قانون القياس المنطقى )

الحجة $(p \to r) \quad \alpha \quad (q \to r)\ ,\ (p \to q)$ ملزمة ويمكن التحقق

من ذلك بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

| p | q | r | $(p$ | $\to$ | $q)$ | $\wedge$ | $(q$ | $\to$ | $r)$ | $\to$ | $(p$ | $\to$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | F | T | F | F | T | T | F | F |
| T | F | T | T | F | F | F | F | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F | F | F | T | F | T | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T | T | T | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | F | T | T | F | T | F | F | T | F | T | F |
| F | F | T | F | T | F | T | F | T | T | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T | F | T | F | T | F | T | F | T | F |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 7 | 2 | 5 | 3 | 8 | 1 | 6 | 3 |

ومن الجدول بالعمود فى الخطوة 8 يتضح أن التقرير صائب منطقيا وبالتالى الحجة تكون ملزمة.

مثال ١١ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا واظب الطالب على حضور محاضرات الرياضيات فإنه سوف يفهم الرياضيات .

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان .

أذن المواظبة على حضور المحاضرات شرط كافى للنجاح فى الامتحان .

الحل : نفرض التقارير

$p$ : الطالب يواظب على حضور محاضرات الرياضيات

$q$ : الطالب يفهم الرياضيات

$r$ : الطالب ينجح فى الامتحان

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$S_1 : p \to q$$
$$S_2 : q \to r$$
$$\overline{\phantom{xxxxxxxx}}$$
$$S : p \to r$$

أى إن الحجة $S_1 \ , \ S_2 \ \alpha \ S$ تكون بالصورة $(p \to q), (q \to r) \ \alpha \ (p \to r)$
وهذه حجة ملزمة وفقا لقانون القياس المنطقى، أذن الحجة المعطاة تكون ملزمة.

مثال ١٢ : بطريقتين مختلفتين حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة

$$(p \to q), \ \sim p \ \ \alpha \ \sim q$$

الحل :

الطريقة الأولى : بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \to q) \wedge \sim p \ \to \ \sim q$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \to q$ | $(p \to q) \wedge \sim p$ | $(p \to q) \wedge \sim p \to \sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | F | T |
| T | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T | F |
| F | F | T | T | T | T | T |

من الجدول نلاحظ أن التقرير الشـــرطى $(p \to q) \wedge \sim p \ \to \ \sim q$ غير صـــائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون غير ملزمة.

الطريقة الثانية : من المعطيات $\sim p$ صواب، $p \to q$ صـــواب، أذن $p$ خطـــأ، ومـــن تعريف الشرطية $p \to q$ وحيث أن $p$ خطأ أذن $q$ يمكن أن تكـــون صواب أو خطأ وبالتالى لا نستطيع معرفة قيمة حقيقـــة $q$ ، أى إن الحجـــة تكون غير ملزمة .

## ٣ - الحجج والمقاييس Arguments and Quantifiers

نفرض أن $p(x)$ دالة افتراضية على المجموعة A. إذا كان التقريـر $\forall x \in A , p(x)$ صواب فإنه بصفة خاصة يكون $p(x_0)$ صواب للعنصر $x_0 \in A$ ، وبـــالمثل إذا كـــان $p(x_0)$ صواب لعنصر معين $x_0 \in A$ أذن التقرير " $\exists x \in A : p(x)$ " يكـــون صواب.

نظرية ٢ : الحجج الآتية تكون ملزمة :

$$1- \quad \left(\forall x \in A , p(x)\right) , \; x_0 \in A \quad \alpha \quad p(x_0)$$

$$2- \quad x_0 \in A \; , \; p(x_0) \; \alpha \quad \left(\exists x \in A : p(x)\right)$$

مثال ١٣ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

كل طلاب قسم الرياضيات أذكياء .

حسين طالب بقسم الرياضيات .

أذن حسين طالب ذكى .

الحل : نفرض أن $M$ هى مجموعة طلاب قسم الرياضيات

$p(x)$ ترمز إلى " $x$ طالب ذكى "

$x_0$ ترمز إلى " حسين "

أذن يمكن صياغة الحجة بالصورة

$$S_1 : \forall x \in M , p(x)$$

$$S_2 : \quad x_0 \in M$$

---

$$S : p(x_0)$$

أى إن الحجة هى

$$\left(\forall x \in M , p(x)\right) , \; x_0 \in M \quad \alpha \quad p(x_0)$$

وهذه حجة ملزمة ( نظرية ( ٢ ) )، أذن الحجة المعطاة تكون ملزمة.

مثال ١٤ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

حسين طالب بقسم الرياضيات .

حسين طالب ذكي .

أذن يوجد على الأقل طالب ذكي بقسم الرياضيات .

الحل :

نفرض أن

$M$ ترمز إلى مجموعة طلاب قسم الرياضيات

$p(x)$ ترمز إلى " $x$ طالب ذكي "

$x_0$ ترمز إلى " حسين "

أذن يمكن صياغة الحجة بالصورة

$$S_1 \ : \quad x_0 \in M$$

$$S_2 \ : \quad p(x_0)$$

---

$$S \ : \quad \exists \ x \in M \ : \ p(x)$$

أى إن الحجة هى

$$x_0 \in M \ , \ p(x_0) \ \alpha \quad \big( \exists \ x \in M : p(x) \big)$$

وهذه حجة ملزمة ( نظرية ( ٢ ) ) ، أذن الحجة المعطاة تكون ملزمة .

## ٤ – التقارير المصورة بأشكال فن

## Picturing Statements with Venn Diagrams

أشكال فن يمكن استخدامها لتحديد إلزامية أو عدم إلزامية بعض الأنواع من الحجــج، ومــن أمثلة هذه الأنواع ما يسمى بالقياسات المنطقية **Syllogisms**.

تعريف ٤ : القياس المنطقى **Syllogism** هى حجة تحتوى على ثلاث تقارير

| | |
|---|---|
| المقدمة الكبرى | **major premise** |
| المقدمة الصغرى | **minor premise** |
| الاستنتاج | **conclusion** |

وكما نعلم فإن الحجة الملزمة هى حجة نحصل فيها على الاستنتاج بطريقة منطقية من المقدمـات وفقا لقوانين المنطق. والمثال الآتى يمثل قياس منطقى **Syllogism** وهى حجة ملزمة:

كل طلاب قسم الرياضيات أذكياء .

لا يوجد إنسان ذكى ويكون ضعيف .

أذن لا يوجد طالب بقسم الرياضيات ضعيف .

نلاحظ فى هذا المثال أن كل تقرير يحتوى على مقياس مثل " كـــــل " أو " لا يوجـــد ". والقياس المنطقى **Syllogism** التى سنتعامل معها هنا هى تقارير تحتوى على مقاييس ، وسـوف نتعامل مع أربعة أنواع :

النوع الأول : التقرير الكلى الموجب **universal affirmative**

" لكلA يكون **B** "

وكمثال على ذلك التقرير " كل الطلاب أذكياء "

النوع الثانى : التقرير الكلى السالب **universal negative**

" لا يوجد **A** يكون **B** "

وكمثال على ذلك التقرير " لا يوجد طلاب أذكياء "

النوع الثالث : التقرير الخاص الموجب particular affirmative

" بعضA يكون B "

وكمثال على ذلك التقرير " بعض الطلاب أذكياء "

النوع الرابع : التقرير الخاص السالب particular negative

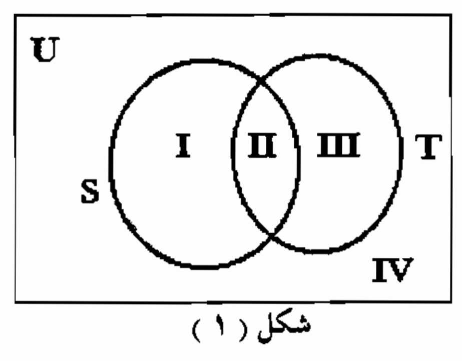
" بعض A لا يكون B "

وكمثال على ذلك التقرير " بعض الطلاب غير أذكياء "

وسوف نناقش الآن كيفية تمثيل كل من هذه الأنواع باستخدام أشكال فن .

النوع الأول : التقرير الكلى الموجب universal affirmative

نفرض التقرير " كل الطلاب أذكياء"، فى هذه الحالة لدينا مجموعتان ، المجموعة الأولى هى مجموعة الطلاب ونرمز لها بالرمز S والمجموعة الثانية هى مجموعة الناس الأذكياء ونرمز لها بالرمز T، والمجموعتان تقعان داخل المجموعة الشاملة وسوف نرمز لها دائما بالرمز U وهى تمثل هنا مجموعة كل الناس، ويتم تمثيل كل مجموعة على صورة دائرة ويفضل رسم الدائرتان متقاطعتان وذلك لدراسة جميع الاحتمالات الممكنة كما يفضل البدء برسم المجموعة S من اليسار يليها المجموعة T وفقا لترتيبهم فى التقرير كذلك نعطى ترقيم للمناطق المختلفة بالرسم وفى هذه الحالة ( مجموعتان ) تكون أربعة مناطق I , II , III , IV كما موضح بالشكل (١).




شكل ( ١ )

S = مجموعة الطلاب ، T = مجموعة الناس الأذكياء

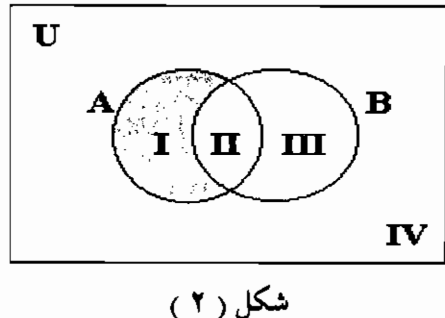
والتقرير "كل الطلاب أذكياء" يعنى أن مجموعة الطلاب تكون مجموعة جزئية من مجموعة الناس الأذكياء ، أى إن مجموعة الطلاب تكون موجودة بالكامل فى المنطقة II بينما المنطقة I تكون فارغة، وإذا استخدمنا أسلوب التظليل فقد يكون الانطباع الأول للقارئ هو القيام بتظليل المنطقة II والتى تمثل S I T لان جميع عناصر S موجودة فى T ، ولكن أسلوب التظليل هذا لن يكون مناسب لبعض التقارير خاصة إذا كان التقرير يحتوى على مجموعة خالية لا يوجد لها أى عنصر فمثلا التقرير

" كل الأعداد الصحيحة التى تحقق $2x = 1$ تكون أعداد زوجية "

من النوع الأول ولتمثيله بأشكال فن نفرض A مجموعة الأعداد الصحيحة التى تحقق$2x = 1$، ونفرض B مجموعة الأعداد الزوجية. نلاحظ أن المجموعة A مجموعة خالية حيث لا يوجد عدد صحيح يحقق $2x = 1$ وفى هذه الحالة إذا استخدمنا أسلوب التظليل فإن تظليل المنطقة II يعنى أن المجموعة A تحتوى على عناصر وهذا ليس صحيح ولذلك لابد أن نستخدم أسلوب آخر لرسم التقارير بأشكال فن بحيث يكون مناسب لجميع الحالات، والأسلوب الذى يصلح لذلك هو أن نميز المجموعات أو المناطق الخالية التى لا تحتوى على أى عنصر وفقا للتقرير المعطى ويتم ذلك عن طريق استبعاد أو حذف هذه المناطق الخالية وهذا الأسلوب يسمى أسلوب الحذف elimination technique وبتطبيق هذا الأسلوب على التقرير

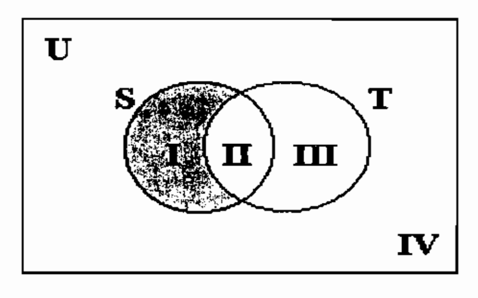
" كل الأعداد الصحيحة التى تحقق $2x = 1$ تكون أعداد زوجية "

نلاحظ انه إذا كان يوجد أعداد صحيحة تحقق $2x = 1$ فإنها لابد أن تكون جميعها داخل مجموعة الأعداد الزوجية ولكن سواء كانت موجودة أو غير موجودة فإن المنطقة I لابد أن تكون خالية ، ووفقا للتقرير المعطى فإنه لا يوجد عنصر فى A غير موجود فى B ولذلك يمكننا حذف المنطقة I ، ويتم ذلك بتظليل المنطقة I لنعنى إنها مستبعدة كما موضح بشكل (٢)



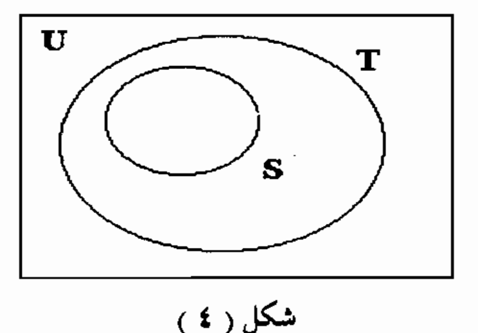

شكل ( ٢ )

والآن نعود إلى التقرير الأصلى "كل الطلاب أذكياء"، ولرسمه بأشكال فن نلاحظ انه لا يوجد طالب فى المجموعة S غير موجود فى المجموعة T ، وبالتالى المنطقة I تكون خالية ويتم حذفها عن طريق التظليل كما موضح بشكل ( ٣ )




شكل ( ٣ )

وقد يتساءل البعض "لماذا لا يتم رسم المجموعتان T , S على صورة دائرة داخل دائرة بـــدلا من الدائرتان المتقاطعتان طالما أن $S \subset T$ كما موضح بالشكل (٤) ؟"




شكل ( ٤ )

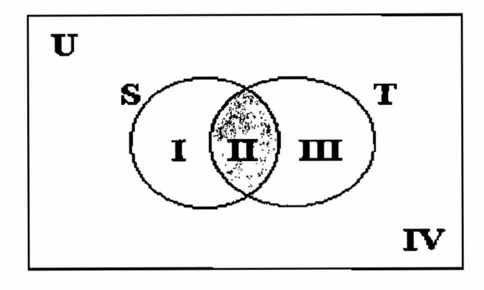
والإجابة بالطبع هى أن هذا التمثيل يكون أيضا صحيح، ولكن دعنا نتذكر أننا فى تعاملنا مع الحجج سوف نقوم برسم أكثر من تقرير فى شكل واحد ولذلك يكون التعامل بأسلوب الحذف افضل كثيرا من أسلوب دائرة داخل دائرة.

والآن وبعد هذه المناقشة يمكننا القول أن استخدام أسلوب الدوائر المتقاطعة فى أشكال فن وأسلوب الحذف سوف يمكننا من تحديد ما إذا كانت الحجة ملزمة أو غير ملزمة بمجرد النظر إلى الشكل بعد رسم المقدمات المنطقية للحجة.

النوع الثانى : التقرير الكلى السالب **universal negative**

نفرض التقرير "لا يوجد طلاب أذكياء " مرة ثانية لدينا مجموعتان هما مجموعة الطلاب S ومجموعة الناس الأذكياء T والسؤال الآن "أى المناطق سوف تحذف فى هذه الحالة ؟"

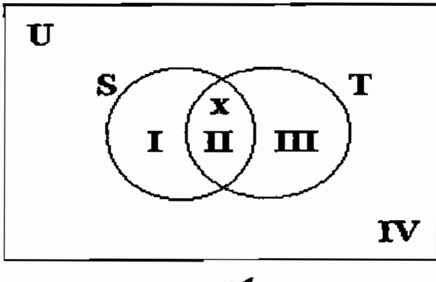
نلاحظ انه لا يوجد عناصر فى مجموعة الطلاب S بحيث تكون أيضا فى مجموعة الناس الأذكياء T، أذن المنطقة II تكون خالية ولذلك يمكننا حذفها بالتظليل، والشكل (٥) يوضح رسم التقرير المعطى




شكل ( ٥ )

## النوع الثالث : التقرير الخاص الموجب particular affirmative

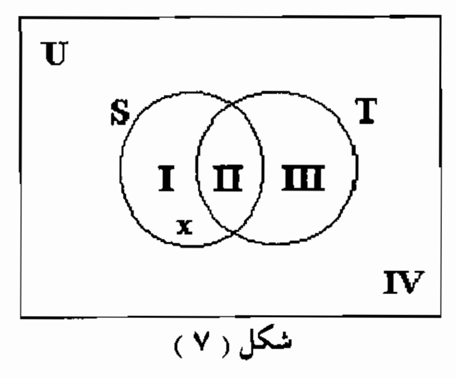
نفرض التقرير "بعض الطلاب أذكياء". لدينا مجموعة الطلاب S ومجموعة الناس الأذكياء T، ومن التقرير المعطى نلاحظ انه يوجد بعض الطلاب فى المجموعة S بحيث انهم أذكيـــاء أى فى المجموعة T ، أذن توجد بعض العناصر مشتركة بين المجموعتان T , S وحيــث أن كلمــة (بعض) تعنى يوجد واحد على الأقل أذن يوجد طالب واحد على الأقل مشترك بين المجموعتان T , S وبالتالى المنطقة II تكون غير خالية ونوضح ذلك على الرسم بوضع العنصــر x فى المنطقة II والشكل (٦) يوضح رسم التقرير المعطى




شكل (٦)

## النوع الرابع : التقرير الخاص السالب particular negative

نفرض التقرير "بعض الطلاب غير أذكياء ". أى انه يوجد على الأقل طالب واحد فى مجموعــة الطلاب S ليس ذكى، أى غير موجود بالمجموعة T. أذن تقاطع المجموعتان T , S غير خالى وبالتالى المنطقة II غير خالية وكذلك المنطقة I غير خالية حيث يوجد على الأقـــل عنصـــر واحد فيها وسوف نرمز لهذا العنصر بالرمز x والشكل (٧) يوضح رسم التقرير المعطى.

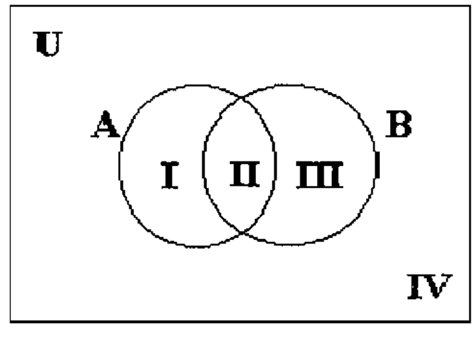



شكل ( ٧ )

**ملاحظة :**

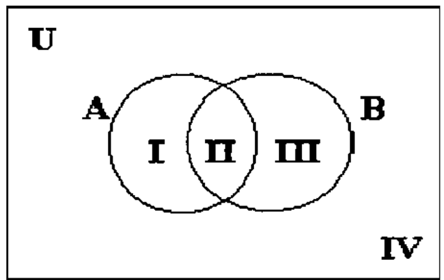
التقارير المتكافئة يكون لها نفس المناطق المحذوفة ونفس شكل فن .

فمثلا التقرير "لا يوجد A يكون B " يكافئ التقرير "لا يوجد B يكون A " ولهما نفس شكل فن الموضح بشكل ( ٨ )



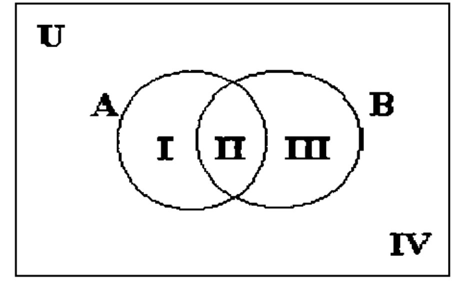

شكل ( ٨ )

بينما التقرير "لكل A يكون B " لا يكافئ التقرير "لكل B يكون A " وهذا يتضح من شكل فن لكل تقرير بشكل (٩) ، (١٠).




شكل ( ٩ )

" لكلA يكون B "




شكل ( ١٠ )

"لكلB يكون A"

مثال ١٥ : حدد نوع كل من التقارير الآتية ثم ارسم كل منها باستخدام أشكال فن:

١ – بعض مواد الرياضيات مشوقة .

٢ – جميع الامتحانات سهلة .

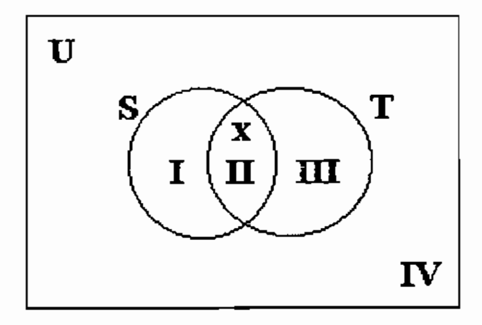
٣ – لا يوجد طالب يفهم الرياضيات ويرسب فيها .

٤ – بعض الطلاب يذاكرون ولكنهم لا يفهمون .

٥ – كل العمال يتفانون فى عملهم .

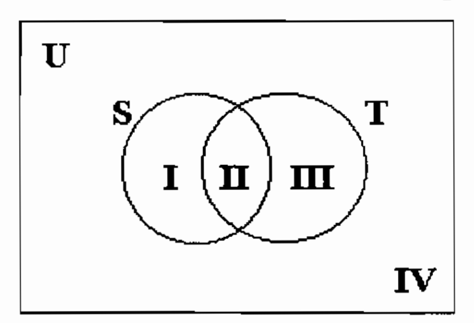
الحـــل :

١ – التقرير "بعض مواد الرياضيات مشوقة" نوعه تقرير خاص موجب ولرسم التقرير بأشكال فن ، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة مواد الرياضيات والمجموعة الثانيـــة T ترمز إلى مجموعة مواد الرياضيات المشوقة ، ومن التقرير المعطى نلاحظ انه يوجد بعـــض مواد الرياضيات فى المجموعة S بحيث أنها مشوقة، أى فى المجموعة T، أذن يوجد مـــادة رياضيات واحدة على الأقل مشتركة بين المجموعتين S , T وبالتالى المنطقة II تكـــون غير خالية ونوضح ذلك على الرسم بوضع العنصر x فى المنطقة II ، والشكل الآتـــى يوضح رسم التقرير المعطى.

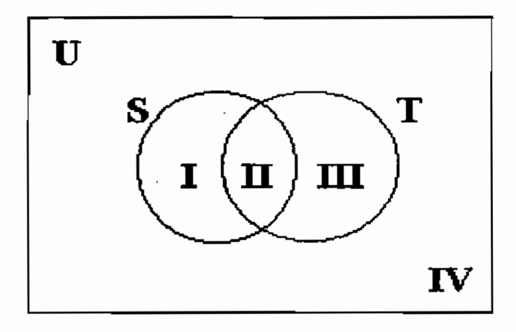



٢ – التقرير "جميع الامتحانات سهلة " نوعه تقرير كلى موجب ولرسم التقرير بأشكال فـــن، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة الامتحانات والمجموعـــة الثانيـــة T ترمـــز إلى مجموعة الامتحانات السهلة ومن التقرير المعطى نلاحظ أن جميـــع عنـــاصر المجموعـــة S

موجودة في المجموعة T وبالتالى المنطقة I تكون خالية ويتم حذفها عن طريق التظليـــل، والشكل الآتى يوضح رسم التقرير المعطى.

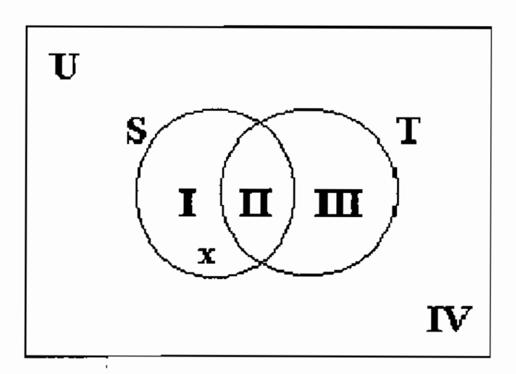



٣ - التقرير "لا يوجد طالب يفهم الرياضيات ويرسب فيها " نوعه تقرير كلى سالب ولرســم التقرير بأشكال فن ، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة الطلاب الذين يفــهمون الرياضيات والمجموعة الثانية T ترمز إلى مجموعة الطلاب الراسبون فى الرياضيات ومــن التقرير المعطى نلاحظ انه لا يوجد عناصر فى مجموعـــة الطـــلاب S الذيـــن يفـــهمون الرياضيات بحيث تكون أيضا فى مجموعة الطلاب T الراسبون، أذن المنطقة II تكـــــون خالية ولذلك يمكننا حذفها بالتظليل، والشكل الآتى يوضح رسم التقرير المعطى.

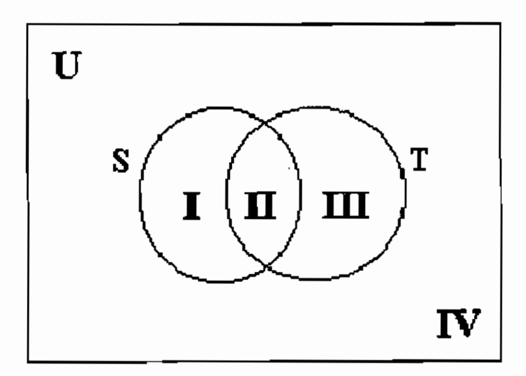



٤ - التقرير " بعض الطلاب يذاكرون ولكنهم لا يفهمون " نوعه تقرير خاص سالب ولرســم التقرير بأشكال فن، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة الطلاب الذين يذاكرون والمجموعة الثانية T ترمز إلى الطلاب الذين يفهمون، ومن التقرير المعطى نلاحظ انـــــه يوجد عناصر فى مجموعة الطلاب S الذين يذاكرون ولكنها تكـــون غـــير موجـــودة فى

مجموعة الطلاب T الذين يفهمون ، أذن المنطقة I غير خالية حيث يوجد علـــى الأقـــل عنصر واحد فيها وسوف نرمز لهذا العنصر بالرمز x، والشكل الآتـــى يوضـــح رســـم التقرير المعطى.




٥ - التقرير "كل العمال يتفانون فى عملهم" نوعه تقرير كلى موجب ولرسم التقرير بأشـــكال فن، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة جميع العمال والمجموعة الثانية T ترمز إلى مجموعة العمال الذين يتفانون فى عملهم ومن التقرير المعطى نلاحظ أن جميـــع عنـــاصر المجموعة S موجودة فى المجموعة T وبالتالى المنطقة I تكون خالية ويتم حذفها عن طريق التظليل، والشكل الآتى يوضح رسم التقرير المعطى.



**تعريف ٥: التقارير المترابطة Consistent**

التقارير التى تكون متحققة معا، أى أنها لا تناقض بعضها البعض، تسمى تقارير مترابطة consistent والتقارير التى لا يمكن أن تتحقق معا، أى أنها تناقض بعضها البعض، تسمى تقارير غير مترابطة inconsistent.

ويمكن استخدام أشكال فن لتحديد ما إذا كانت التقارير مترابطة أو غير مترابطة .

مثال ١٦ : استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كان التقريران الإتيان مترابطان أو غير مترابطان

١ – بعض الطلاب راسبون .

٢ – لا يوجد طالب راسب .

الحل :

نفرض S مجموعة الطلاب، T مجموعة الطلاب الراسبون، والآن نحاول رسم شكل فن للتقريرين معا.

التقرير

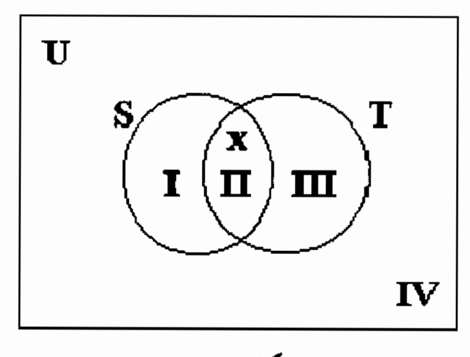
" بعض الطلاب راسبون "

أى انه يوجد على الأقل طالب واحد فى مجموعة الطلاب S ويكون راسب وبالتالى يكون موجود بالمجموعة T ورسم هذا التقرير يتم بوضع الرمز x فى المنطقة II .

والتقرير

" لا يوجد طالب راسب "

يعنى أنه لا يوجد أى عنصر مشترك بين المجموعتين T , S وبالتالى فإن المنطقة II تكون خالية لذلك نحذفها عن طريق التظليل كما بشكل ( ١١ )




شكل (١١)

ونلاحظ أننا عند رسم التقرير الثانى حذفنا المنطقة II ولكن فى نفس الوقت عند رسم التقرير الأول وضعنا العنصر x فى المنطقة II لنعنى وجود عنصر على الأقل فى المنطقة II بينما هى منطقة محذوفة وهذا يمثل تناقض، أذن لا يمكن رسم التقريران فى نفس الشكل، أى لا يمكن أن يتحققا معا فى نفس الوقت وبالتالى التقريران غير مترابطان.

مثال ١٧: استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كان التقريران الإتيان مترابطان أو غير مترابطان

١ – لا يوجد مادة صعبة فى الرياضيات

٢ – بعض مواد الرياضيات ليست صعبة

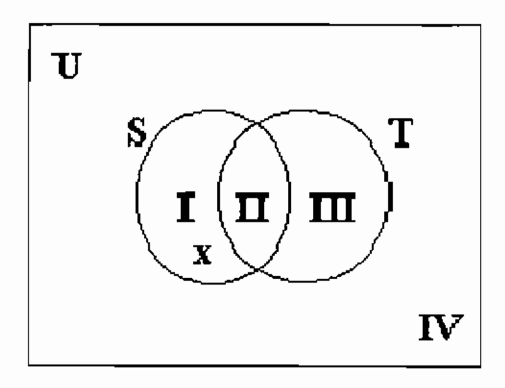
الحـــل :

نفرض S مجموعة مواد الرياضيات، T مجموعة مواد الرياضيات الصعبة والآن نحاول رسم شكل فن للتقريرين معا.

التقرير

"لا يوجد مادة صعبة فى الرياضيات"

يعنى أنه لا يوجد أى عنصر مشترك بين المجموعتين T , S وبالتالى فإن المنطقة II تكون خالية لذلك نحذفها عن طريق التظليل كما بشكل ( ١٢ )




والتقرير

"بعض مواد الرياضيات ليست صعبة"

أى انه يوجد على الأقل مادة فى الرياضيات أى فى المجموعة S وليست ضمن المواد الصعبة، وبالتالى تكون غير موجودة بالمجموعة T ورسم هذا التقرير يتم بوضع الرمز x فى المنطقة I وحيث انه يمكننا رسم التقريران معا فى نفس الشكل بدون اى تعارض أذن التقريران مترابطان.

## ٥ - الحجج الملزمة وأشكال فن

## Diagrams Valid Arguments and Venn

كما نعلم فإن الحجة تتكون من مقدمات منطقية واستنتاج، والحجة الملزمة نحصل فيها على الاستنتاج بطريقة منطقية من المقدمات ويمكن لمقدمات الحجة أن تحتوى على تقريرين أو أكثر، ولكننا سوف نتعامل فقط مع الحجج من نوع القياسات المنطقية **Syllogisms** والتى تحتوى على

| | |
|---|---|
| المقدمة الكبرى | **major premise** |
| المقدمة الصغرى | **minor premise** |
| الاستنتاج | **conclusion** |

وتعتبر أشكال فن من الوسائل المفيدة فى تحديد إلزامية الحجج من هذا النوع ونؤكد هنا أيضا على الفرق بين إلزامية الحجة وحقيقتها ، فيمكن للحجة أن تكون ملزمة على الرغم من أن الاستنتاج خطأ ومن جهة أخرى يمكن أن يكون الاستنتاج صواب ولكن الحجة غير ملزمة. والسؤال الآن

## كيف نحدد إلزامية الحجة بواسطة أشكال فن ؟

ويتم ذلك بان نقوم برسم المقدمات المنطقية فى شكل فن، وإذا كان الاستنتاج واضح ويمكن الوصول أليه من شكلَ فن بدون أى غموض فهذا يعنى أن الحجة تكون ملزمة، أما إذا رسمنا المقدمات المنطقية بدون أن نتمكن من توضيح الاستنتاج فإن الحجة تكون غير ملزمة. والآن نعطى بعض الأمثلة لتوضيح كيفيَة استخدام أشكال فن فى تحديد إلزامية الحجة.

مثال ١٨ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

كل الطلاب أذكياء

لا يوجد فاشل ويكون ذكى

أذن لا يوجد فاشل بين الطلاب

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

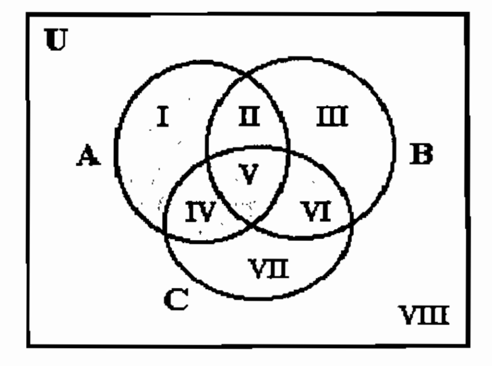
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الطلاب

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الأذكياء

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الفاشلون

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل الطلاب أذكياء" يتم باستبعاد المناطقIV , I ورسم المقدمة الصغرى "لا يوجد فاشل ويكون ذكي" يتم باستبعاد المناطق VI , V . والآن نلاحظ أن الاستنتاج "لا يوجد فاشل بين الطلاب" يعنى انه لا يوجد عنصر مشترك بين المجموعتين A , C وهذا واضح من الرسم حيث نجد أن المنطقة المشتركة بين المجموعتين C , A يمثلها المناطق V , IV وهى ضمن المناطق المستبعدة عند رسم المقدمات المنطقية ، وهذا يعنى أن الاستنتاج واضح ويمكن الوصول أليه من شكل فن بدون أى غموض وبالتالى الحجة تكون ملزمة.

مثال ١٩ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

لا يوجد من المغامرين خاسر

لا يوجد من الخاسرين ذكى

أذن لا يوجد من المغامرين ذكى

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

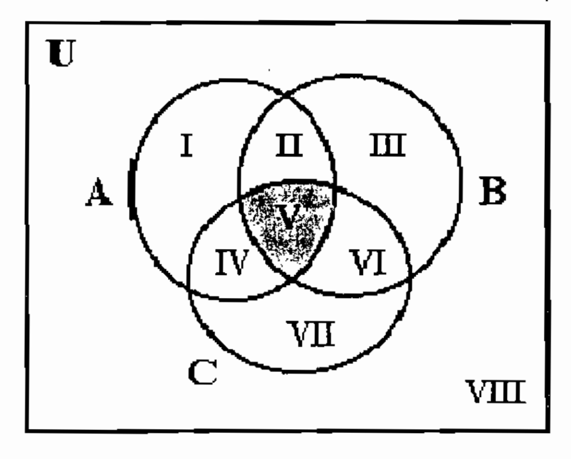
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الناس المغامرين

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الخاسرين

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الأذكياء

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق.

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى " لا يوجد من المغامرين خاسر" يتم باستبعاد المناطق V , II ورسم المقدمة الصغرى "لا يوجد من الخاسرين ذكي" يتم باستبعاد المناطق V , VI. والآن نلاحظ أن الاستنتاج "لا يوجد من المغامرين ذكي" يعنى انه لا يوجد عنصر مشترك بين المجموعتين A,C ولكن واضح من الرسم أن المنطقة IV مشتركة بين المجموعتين A , C أى أنها تمثل مغامرين أذكياء وهى ليست ضمن المناطق المستبعدة عند رسم المقدمات المنطقية، وبالتالى يمكن أن يتواجد بها عناصر، وهذا يعنى أن الاستنتاج لا يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون غير ملزمة.

مثال ٢٠: استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

كل المغامرون فائزون

بعض المغامرون أذكياء

أذن بعض الفائزون أذكياء

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

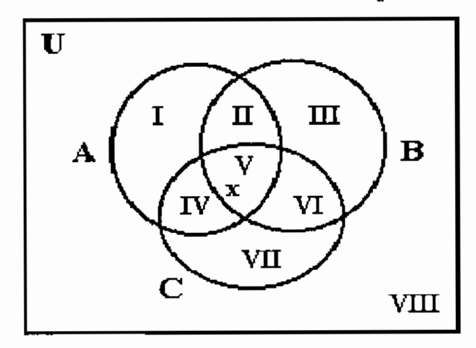
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الناس المغامرون

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الفائزون

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الأذكياء

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل المغامرون فائزون" يتم باستبعاد المناطق IV , I ورسم المقدمة الصغرى "بعض المغامرون أذكياء" تخبرنا بوجود بعض العناصر فى A I C لذلك نضع العنصر x فى المنطقة IV أو المنطقة V ، وحيث أن المنطقة IV مستبعدة لذلك فإن رسم المقدمة الصغرى يتم بوضع العنصر x فى المنطقة V. والآن نلاحظ أن الاستنتاج "بعض الفائزون أذكياء " يعنى انه يوجد عنصر مشترك بين المجموعتين C , B وهذا واضح من الرسم لان العنصر x ينتمى فى المنطقة V الواقعة ضمن المجموعتين B , C وفى هذه الحالة العنصر x يمثل أحد الفائزون الأذكياء، وهذا يعنى أن الاستنتاج يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون ملزمة.

مثال ٢١ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

كل المغامرون فائزون

بعض المغامرون ليسوا أذكياء

أذن بعض الأذكياء ليسوا مغامرون

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

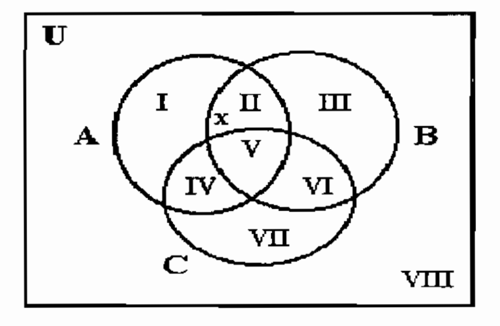
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الناس المغامرون

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الفائزون

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الأذكياء

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل المغامرون فائزون" يتم باستبعاد المناطق IV , I ورسم المقدمة الصغرى "بعض المغامرون ليسوا أذكياء" تخبرنا بوجود بعض العناصر فى مجموعة المغامرونA وفى نفس الوقت غير موجودة فى مجموعة الأذكياءC لذلك نضع العنصر x فى المنطقة I أو المنطقة II وحيث أن المنطقة I مستبعدة لذلك فإن رسم المقدمة الصغرى يتم بوضع العنصر x فى المنطقة II. والآن نلاحظ أن الاستنتاج "بعض الأذكياء ليسوا مغامرون" يعنى انه يوجد عنصر فى مجموعة الأذكياءC وفى نفس الوقت غير موجود فى مجموعة المغامرونA وهذا ليس واضح من الرسم لان العنصر x الموجود على الرسم ينتمى فى المنطقة II وفى هذه الحالة العنصر x يمثل أحد المغامرون الغير أذكياء، وهذا يعنى أن الاستنتاج لا يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون غير ملزمة.

مثال ٢٢ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

كل المربعات مستطيلات

بعض المستطيلات تكون متوازيات أضلاع

أذن بعض المربعات تكون متوازيات أضلاع

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

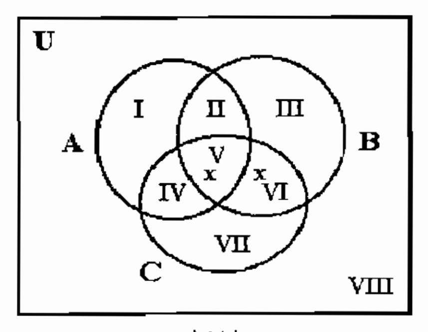
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة المربعات

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة المستطيلات

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة متوازيات أضلاع

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل المربعات مستطيلات" يتم باستبعاد المناطق IV , I ورسم المقدمة الصغرى "بعض المستطيلات تكون متوازيات أضلاع" تخبرنا بوجود بعض العناصر فى مجموعة المستطيلات B وفى نفس الوقت موجودة فى مجموعة متوازيات الأضلاع C لذلك نضع العنصر x فى المنطقة V أو فى المنطقة VI وهنا يحدث الغموض لأنه إذا أخذنا العنصر x فى المنطقة V فإن الاستنتاج "بعض المربعات تكون متوازيات أضلاع" يتحقق، بينما إذا أخذنا العنصر x فى المنطقة VI فإن الاستنتاج لا يتحقق، وهذا يعنى أن الاستنتاج لا يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون غير ملزمة.

# تمارين الفصل الخامس

١ – حدد إلزامية كل من الحجج الآتية :

| | |
|---|---|
| ١ –<br>إذا كنت بصحة جيدة فإنك سوف تكـــون سعيد.<br>أنت سعيد .<br>أذن أنت بصحة جيدة . | ٦ –<br>إذا سقطت الأمطار فلن أتمكن من السفر .<br>سوف أتمكن من السفر .<br>أذن لم تسقط أمطار . |
| ٢ –<br>عادل وحسين سوف يذهبان إلى الحديقة .<br>عادل ذهب إلى الحديقة .<br>أذن حسين سوف يذهب إلى الحديقة . | ٧ –<br>إذا كان 1 = 2 فإن 4 = 8 .<br>العدد 4 لا يساوى 8 .<br>أذن العدد 2 لا يساوى 1 . |
| ٣ –<br>عادل وحسين سوف يذهبان إلى الحديقة .<br>عادل لم يذهب إلى الحديقة .<br>أذن حسين لن يذهب إلى الحديقة . | ٨ –<br>إذا كان 5 عدد زوجي فإن8 عدد فردى.<br>العدد 5 عدد زوجي .<br>أذن العدد 8 عدد فردى . |
| ٤ –<br>سقوط المطر شرط كافى لنمو المزروعات .<br>المطر لم يسقط .<br>أذن المزروعات لن تنمو . | ٩ –<br>إذا كان المستقيمان متعامدين فإنهما يصنعـــان زاوية قائمة .<br>المستقيمان $\ell_2$ , $\ell_1$ لا يصنعـــان زاويـــة قائمة.<br>أذن المستقيمان $\ell_2$ , $\ell_1$ غير متعامدان . |

| ٥ – | ١٠ – |
|---|---|
| إذا سقطت الأمطار فلن أتمكن من السفر .<br>أنها لم تمطر .<br>أذن سوف أتمكن من السفر . | إذا حضرت فى الموعد فإن ساعتك تكون مضبوطة .<br>ساعتك غير مضبوطة .<br>أذن أنت لن تحضر فى الموعد . |

٢ – حدد إلزامية كل من الحجج الآتية :

١ ) تساوى أضلاع المثلث شرط ضرورى وكافى لتساوى زوايا المثلث .
المثلث زوياه مختلفة .
أذن المثلث أضلاعه مختلفة .

٢ ) إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين .
المثلث متساوى الساقين .
أذن المثلث متساوى الأضلاع .

٣ ) إذا كانت الدالة f غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للتفاضل .
الدالة f قابلة للتفاضل .
أذن الدالة f متصلة .

٤ ) إذا درس الطالب منهج الرياضيات بفهم فإنه سوف يجتاز الامتحان بتفوق .
الطالب لم يجتاز الامتحان بتفوق .
أذن الطالب لم يدرس منهج الرياضيات بفهم .

٥ ) الطالب لم يستذكر دروسه أو هو غائب عن المحاضرة .
إذا غاب الطالب عن حضور المحاضرة فإنه لن يفهم الدرس .
أذن ليس صحيحا أن الطالب فهم الدرس واستذكر دروسه .

٦ ) سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .
المطر يسقط والشباب يجدون فرص عمل جديدة .
أذن الصحراء يتم تعميرها .

٧ ) سقوط المطر شرط ضروري وكافى لتعمير الصحراء .
إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .
الشباب يجدون فرص عمل جديدة .
أذن المطر يسقط والصحراء يتم تعميرها .

٣ – حدد بطريقتين مختلفتين إلزامية كل من الحجج الآتية :

1 – $(p \rightarrow \sim q),\ \sim p \quad \alpha \quad \sim q$
2 – $(p \leftrightarrow q),\ q \quad \alpha \quad p$
3 – $(p \rightarrow \sim q),\ (r \rightarrow q),\ r \quad \alpha \quad \sim p$
4 – $(p \rightarrow \sim q),\ (\sim r \rightarrow \sim q) \quad \alpha \quad (p \rightarrow \sim r)$
5 – $(p \rightarrow q),\ (r \rightarrow \sim q) \quad \alpha \quad (r \rightarrow \sim p)$

٤ – بالنسبة للمقدمات المنطقية التالية ، أوجد الاستنتاج المناسب بحيث تكون الحجة ملزمة :

1 – $(p \rightarrow \sim q),\ q$
2 – $(p \leftrightarrow q),\ (r \rightarrow \sim p)$
3 – $(p \rightarrow \sim q),\ (\sim p \rightarrow r)$
4 – $(r \rightarrow p)(q \rightarrow \sim p),\ r$
5 – $(p \rightarrow q),\ (\sim r \rightarrow \sim q),\ (r \rightarrow \sim s)$

٥ – صنف كل من التقارير الآتية من حيث كونها
( كلي موجب – كلي سالب – خاص موجب – خاص سالب )
ثم ارسم التقرير باستخدام أشكال فن .
١ – كل الجيران طيبون .
٢ – بعض الأولاد أشقياء .
٣ – لا يوجد مدرس لا يجيد استخدام الكومبيوتر .

٤ – بعض السيارات تعمل بالغاز الطبيعى .

٥ – المدن الجديدة التى تم إنشائها فى الصحراء جميعها مدن منظمة .

٦ – بعض الأعداد الأولية ليست أعداد فردية .

٧ – الدوال القابلة للتفاضل يكون جميعها دوال متصلة .

٨ – يوجد دوال متصلة وتكون غير قابلة للتفاضل .

٩ – فاقد الشىء لا يعطيه .

١٠ – لكل مجتهد نصيب .

٦ – استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كان زوج التقارير مترابط أو غير مترابط فى كل مما يأتى :

١) بعض الناس الطيبون شجعان .
لا يوجد إنسان شجاع ويكون غير طيب .

٢) كل عدد حقيقى يكون عدد نسبى .
كل عدد نسبى يكون عدد حقيقى .

٣) بعض المواد الدراسية تكون مشوقة .
لا يوجد مادة دراسية غير مشوقة .

٤) كل الدوال القابلة للتفاضل تكون متصلة .
بعض الدوال المتصلة تكون قابلة للتفاضل .

٥) بعض المواد الدراسية تكون غير مشوقة .
المنطق الرياضى مادة مشوقة .

٦) كل الدوال القابلة للتفاضل تكون متصلة .
بعض الدوال القابلة للتفاضل تكون غير متصلة .

٧) كل عدد صحيح يكون عدد حقيقى .
بعض الأعداد الحقيقة تكون أعداد غير صحيحة.

٨) بعض الأعداد الحقيقة تكون أعداد نسبية .
بعض الأعداد النسبية تكون أعداد حقيقية .

٧ – فى كل من الحجج الآتية استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كانت الحجة ملزمة أو غـــير ملزمة :

١ – كل الطلاب الدارسون للرياضيات يستخدمون الكومبيوتر .
بعض الطلاب الدارسون للتاريخ يستخدمون الكومبيوتر .
أذن بعض الطلاب الدارسون للرياضيات يدرسون التاريخ .

٢ – كل الدوال القابلة للتفاضل تكون دوال متصلة .
بعض الدوال المتصلة تكون دوال زوجية .
أذن لا يوجد دالة زوجية غير قابلة للتفاضل .

٣ – كل الأعداد الصحيحة تكون أعداد حقيقية .
بعض الأعداد الحقيقية تكون أعداد مركبة .
أذن لا يوجد من بين الأعداد مركبة أعداد صحيحة.

٨ – فى كل من الحجج الآتية استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كانت الحجة ملزمة أو غـــير ملزمة :

| ١ – | ٢ – |
|---|---|
| كل الفائزون مغامرون .<br>لا يوجد مغامر غير ذكى .<br>أذن بعض الأذكياء مغامرون . | كل مجتهد له نصيب فى النجاح .<br>لا يوجد فاشل بين المجتهدون .<br>أذن لا يوجد مجتهد بين الفاشلون . |
| ٣ – | ٤ – |
| بعض الطلاب شجعان .<br>كل الرجال شجعان .<br>أذن بعض الطلاب رجال . | كل الدوال المثلثية تكون دوال زوجية .<br>بعض الدوال المثلثية تكون دوال متصلة .<br>أذن بعض الدوال الزوجيـــة تكـــون دوال متصلة . |

| ٥ – | ٦ – |
|---|---|
| كل المهندسون أذكياء . | بعض الدوال المثلثية تكون دوال زوجية . |
| بعض المؤلفون أذكياء . | لا يوجد دوال مثلثية غير متصلة . |
| أذن بعض المؤلفون مهندسون . | أذن لا يوجد من الدوال الزوجية دوال متصلة . |
| ٧ – | ٨ – |
| كل الصيادون يحبون البحر . | كل الأعداد الصحيحة أعداد حقيقية . |
| كل الصيادون لا يكذبون . | كل الأعداد الحقيقية أعداد مركبة . |
| أذن من يحب البحر لا يكذب . | أذن كل الأعداد الصحيحة أعداد مركبة . |
| ٩ – | ١٠ – |
| لا يوجد بائع ويكون حاقد . | كل عدد نسبى يكون عدد حقيقى . |
| لا يوجد من الحاقدين إنسان يكذب . | كل الأعداد الحقيقية غير تخيلية . |
| أذن لا يوجد من البائعين كذاب . | أذن لا يوجد عدد نسبى يكون تخيلى . |

الفصل

6

# طرق البرهان

# Methods of Proof

نعلم أن التقرير، سواء كان بسيطا أو مركبا، بأنه جملة خبرية ذات معنى تحمل خبرا ويمكن الحكم بأنها صائبة أو خاطئة، ولا تكون صائبة وخاطئة فى آن واحد. ولكى نتمكن من الحكم على تقرير ما بالصواب أو الخطأ فلابد أن نكون على علم تام بما نعنيه فى كل كلمة تدخل فى تركيب التقرير وهذا أمر فى غاية الأهمية فى جميع العلوم بل وفى جميع أمور الحياة وليس فى الرياضيات فقط. وتتنوع أساليب البرهان على صحة أو خطأ تقرير ما وفقا للتقرير نفسه، فمثلا التقرير "يتجمد الماء بالبرودة " صائب والبرهان على ذلك يتم بالتجربة والمشاهدة ومن هنا يظهر ما يسمى بالبرهان التجريبى والتقرير "المثلث المتساوى الأضلاع مجموع زواياه 180 درجة" هو تقرير صائب والبرهان على ذلك يتم قياسا للقاعدة التى تقول أن مجموع زوايا المثلث تساوى 180 درجة أى أننا حصلنا على نتيجة خاصة من حالة عامة ومن هنا يظهر ما يسمى بالبرهان القياسي، وهناك بعض التقارير التى نقبل صوابها دون تعليل لأنه لا يوجد ما يناقض صحتها ومثل هذه التقارير تسمى مسلمات **Axioms** فمثلا التقرير

" من نقطة خارج مستقيم معلوم يمر مستقيم واحد فقط يوازى المستقيم المعلوم "

صائب لأنه يمثل مسلمة. وفى الفصل الخامس تحدثنا عن الحجة أو الإثبات ووضحنا كيف نحدد إلزامية أو عدم إلزامية الحجة بطرق مختلفة وبمعنى آخر وضحنا كيف نحدد ما إذا كان الإثبات منطقى أو غير منطقى وفكرة الحجة يمكن تطويرها لتصبح برهان لقضية ويمكننا القول أن البرهان هو إثبات منطقى لقضية ما.

تعريف ١ : البرهان هو متتالية من التقارير $S_1 , S_2 , \dots , S_n$ يستمد منها التقرير $S$ أى أنه على شكل الحجة $S_1 , S_2 , \dots , S_n \; \alpha \; S$ وبحيث أن كل $S_i$ إما أن يكون مسلمة صحيحة أو تقرير صواب مثبت بشكل منطقى من التقارير السابقة له فى المتتالية وفى هذه الحالة فإن الاستنتاج $S$ يسمى نظرية، وكذلك فإن كل $S_i$ يمكن أن يسمى نظرية وبرهانها هو ما يسبق $S_i$ فى المتابعة من تقارير $S_1 , S_2 , \dots , S_{i-1}$ .

وفى مجال الرياضيات فإن العديد من التقارير الرياضية التى يطلب البرهان على صحتها تكون على صورة تقارير شرطية "إذا كان ... فإن ... " وان لم تكن كذلك، فإنه غالبا ما نستطيع تحويلها إلى تقارير شرطية، وسوف نتعرف الآن على بعض الأنواع الرئيسية من البرهان والتى تستخدم فى الرياضيات وسنوضح كلا منها بالأمثلة.

## ١ - البرهان المباشر Direct Proof

توجد بعض التقارير التى يتم برهنتها عن طريق الانتقال من المعطيات إلى المطلوب مباشرة بالاستعانة بالمنطق والمسلمات والتعاريف الرياضية، لذلك يسمى هذا الأسلوب بالبرهان المباشر، أى إن البرهان المباشر يعتمد على الحقيقة المنطقية "إذا كان... فإن ... " $P \rightarrow Q$ حيث نفترض أن المعطيات $P$ صواب ثم نبرهن أن صواب المعطيات يؤدى إلى صواب المطلوب $Q$ ( أى نبرهن أن التضمين $P \Rightarrow Q$ متحقق ) ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

مثال ١ : باستخدام البرهان المباشر اثبت صحة التضمين الآتى :

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge r \;\Rightarrow\; q$$

الحل :

المعطيات : $(\sim p \vee q)$ صواب

$r \rightarrow p$ صواب

$r$ صواب

المطلوب : $q$ صواب

حيث أن $r$ صواب، $r \to p$ صواب ( من المعطيات )

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن $p$ صواب

و من تعريف أداة النفى أذن $\sim p$ يكون خطأ

وحيث أن $(\sim p \vee q)$ صواب ( من المعطيات )

أذن من تعريف أداة الفصل ينتج أن $q$ صواب

أذن التضمين $(\sim p \vee q) \wedge (r \to p) \wedge r \Rightarrow q$ متحقق.

مثال ٢ : باستخدام البرهان المباشر اثبت صحة ما يأتى :

المعطيات : $p \ , \ q \ , \ p \vee q \to r$

المطلوب : $r$

الحل :

المعطيات جميعها صواب

حيث أن $p \ , \ q$ صواب ( من المعطيات )

أذن من تعريف أداة الفصل ينتج أن $p \vee q$ صواب

وحيث أن $p \vee q \to r$ صواب ( من المعطيات )، $p \vee q$ صواب

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن $r$ صواب .

مثال ٣ : باستخدام البرهان المباشر برهن على صحة الحجة الآتية :

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان بتفوق .

الطالب لم ينجح فى الامتحان بتفوق .

أذن الطالب لم يفهم الرياضيات .

الحل : نفرض التقارير

$p$ : الطالب فهم الرياضيات

$q$ : الطالب نجح فى الامتحان بتفوق

أذن المعطيات : $p \rightarrow q$ صواب

$\sim q$ صواب

المطلوب إثبات أن : $\sim p$ صواب

حيث أن $\sim q$ صواب ( من المعطيات )

أذن من تعريف أداة النفى $q$ يكون خطأ

وحيث أن $p \rightarrow q$ صواب ( من المعطيات )، $q$ خطأ

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن $p$ خطأ

و من تعريف أداة النفي أذن $\sim p$ يكون صواب .

مثال ٤ : باستخدام البرهان المباشر برهن على صحة الحجة الآتية :

سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .

المطر يسقط .

أذن الصحراء يتم تعميرها والشباب يجدون فرص عمل جديدة .

الحل : نفرض التقارير $p$ : المطر يسقط

$q$ : الصحراء يتم تعميرها

$r$ : الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة

أذن المعطيات : $p \leftrightarrow q \ , \ q \rightarrow r \ , \ p$ صواب

المطلوب إثبات أن : $q \wedge r$ صواب

حيث أن $p \leftrightarrow q$ ، $p$ صواب (من المعطيات). أذن من تعريف أداة الشرطية المزدوجة فـإن $q$ يكون صواب. وحيث أن $q \rightarrow r$ صواب (من المعطيات)، $q$ صواب. أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن $r$ صواب، ومن تعريف أداة الوصل أذن $q \wedge r$ يكون صواب.

أذن التضمين $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow (q \wedge r)$ متحقق.

مثال ٥ : باستخدام البرهان المباشر برهن صحة التقرير

" إذا كان $x$ عددا فرديا فإن $x^2$ عدد فردى "

الحل : نفرض التقرير $p$ : " $x$ عدد فردى "

والتقرير $q$ : " $x^2$ عدد فردى "

أذن المعطيات هي أن $p$ صائب والمطلوب إثبات أن $q$ صائب ، أى إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$ .

حيث أن ، أى عدد فردى يمكن كتابته بالصورة $2n+1$ حيث $n$ عدد صحيح

$x$ عدد فردى $\Rightarrow x = 2n+1$

$$\Rightarrow x^2 = (2n+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 2\left(2n^2 + 2n\right) + 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 2m + 1 \quad , \quad m = 2n^2 + 2n$$

$\Rightarrow$ $x^2$ عدد فردى

أذن التضمين $p \Rightarrow q$ متحقق .

مثال ٦ : باستخدام البرهان المباشر برهن أن

"مجموع زوايا المثلث تساوى 180 درجة"

الحل :

المعطيات : $abc$ مثلث

المطلوب إثبات أن : قياس$(\hat{a})$ + قياس $(\hat{b})$ + قياس $(\hat{c})$ = 180

a
d e
2 3 ١
2 ١
b c

نرسم المثلث abc ومن الرأس a نرسم المستقيم de موازى للقطعة المستقيمة bc

حيث أن

قياس $(\hat{c})$ = قياس $(\hat{1})$ بالتبادل (لان de يوازى bc)

قياس $(\hat{b})$ = قياس $(\hat{2})$ بالتبادل (لان de يوازى bc)

وحيث أن

قياس $(\hat{1})$ + قياس $(\hat{2})$ + قياس $(\hat{3})$ = 180 (لان $d\hat{a}e$ زاوية مستقيمة)

أذن

قياس $(\hat{c})$ + قياس $(\hat{b})$ + قياس $(\hat{a})$ = 180

أى إن مجموع زوايا أى مثلث تساوى 180 درجة.

## ٢ - البرهان الغير مباشر Indirect Proof

نعلم أن $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ وبالتالى إذا كان التقرير $p \to q$ صائب منطقيا فإن التقرير المكافئ $\sim q \to \sim p$ يكون صائب منطقيا ومن ذلك نستنتج أنه إذا كان التضمين $p \Rightarrow q$ متحقق فإن التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$ يكون متحقق أيضا، وبالتالى يمكن استخدام التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$ بدلا من التضمين $p \Rightarrow q$ ولذلك تسمى هذه الطريقة بالبرهان الغير مباشر وهى تستخدم فى كثير من الأحيان فى الرياضيات لإثبات بعض القوانين والنظريات، ومن ذلك يمكننا القول أن البرهان المباشر ينطلق من القاعدة المنطقية $p \to q$ بينما البرهان الغير مباشر ينطلق من القاعدة المنطقية $\sim q \to \sim p$. أى إننا فى البرهان الغير مباشر نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، ثم نستخدم أسلوب البرهان المباشر فى إثبات أن نفى المعطيات يكون صواب.

مثال ٧ : باستخدام البرهان الغير مباشر اثبت صحة ما يأتي :

المعطيات : $p \ , \ q \ , \ p \vee q \ \rightarrow \ r$

المطلوب : $r$

الحل :باستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات أن $\sim r \Rightarrow \sim\left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)\right)$ .

نفرض أن نفى المطلوب يكون صواب أى إن $\sim r$ صواب. أذن $r$ يكون خطـأ أذن من تعريف أداة الشرطية $p \vee q \ \rightarrow \ r$ وحيث أن $r$ خطأ فإنه ينتج حالتين:

الحالة الأولى : $p \vee q \ \rightarrow \ r$ خطأ وهذا يتحقق إذا كـــان $p \vee q$ صواب، ومـــن تعريف أداة الفصل فإنه توجد ثلاث احتمالات:

الاحتمال الأول : $p$ صواب ، $q$ صواب

الاحتمال الثانى : $p$ صواب ، $q$ خطــأ

الاحتمال الثالث : $p$ خطـــأ ، $q$ صواب

وفى جميع هذه الاحتمالات ومن تعريف أداة الوصل فإن التقرير $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)$ يكون خطأ وبالتالى $\sim\left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)\right)$ يكون صواب. أذن فى هذه الحالة التضمين $\sim r \Rightarrow \sim\left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)\right)$ يكون متحقق.

الحالة الثانية : $p \vee q \ \rightarrow \ r$ صواب وهذا يتحقق إذا كان $p \vee q$ خطأ، ومن تعريف أداة الفصل فإن $p$ خطـــأ، $q$ خطـــأ وبالتـــالى فـــإن التقريـــر $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)$ يكـــــون خطـــــــــأ أى إن $\sim\left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)\right)$ يكون صواب. أذن فى هذه الحالـــة أيضا فإن التضمين $\sim r \Rightarrow \sim\left((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)\right)$ يكـــون متحقق.

مثال ٨ : باستخدام البرهان الغير مباشر برهن أن

"إذا كان $x^2$ عددا فرديا فإن x عدد فردى "

الحل : نفرض

التقرير p : " $x^2$ عدد فردى "

والتقرير q : " x عدد فردى "

المعطيات : التقرير p صائب

والمطلوب : إثبات أن التقرير q صائب

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$

وباستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات صحة التضمين $\sim p \Leftarrow \sim q$ أي $\sim q \Rightarrow \sim p$

وحيث ان

$\sim p$ هو التقرير " $x^2$ عدد غير فردى " أى إن " $x^2$ عدد زوجى "

$\sim q$ هو التقرير " x عدد غير فردى " أى إن " x عدد زوجى "

أذن وفقا لأسلوب البرهان الغير مباشر فإن المطلوب هو إثبات صحة التضمين

x عدد زوجى $\Rightarrow$ $x^2$ عدد زوجى

وحيث أن ، أى عدد زوجى يمكن كتابته بالصورة 2 n حيث n عدد صحيح . أذن

x عدد زوجى $\Rightarrow x = 2n$

$\Rightarrow x^2 = 4n^2$

$\Rightarrow x^2 = 2\left(2n^2\right)$

$\Rightarrow x^2 = 2m \qquad , \qquad m = 2n^2$

$\Rightarrow$ $x^2$ عدد زوجى

أذن التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$ متحقق .

مثال ٩ : باستخدام البرهان الغير مباشر برهن أن

"إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا"

الحل : نفرض

التقرير $p$ : " المثلث متساوى الأضلاع "

والتقرير $q$ : " المثلث متساوى الزوايا "

المعطيات : التقرير $p$ صائب

المطلوب : إثبات أن التقرير $q$ صائب

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$

وباستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات صحة التضمين $\sim q \Rightarrow \sim p$

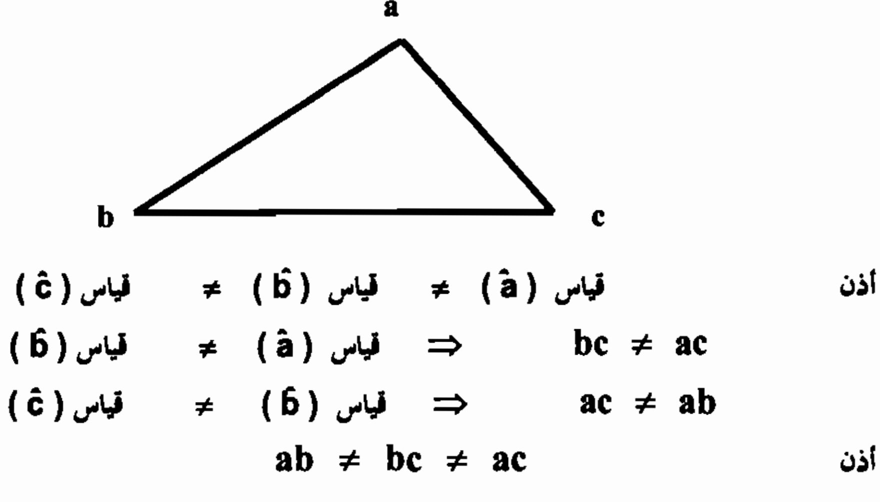
وحيث أن $\sim p$ هو التقرير " المثلث غير متساوى الأضلاع "

$\sim q$ هو التقرير " المثلث غير متساوى الزوايا "

أذن وفقا لأسلوب البرهان الغير مباشر فإن المطلوب هو إثبات صحة التضمين

المثلث غير متساوى الأضلاع $\Rightarrow$ المثلث غير متساوى الزوايا

نفرض المثلث abc غير متساوى الزوايا




أذن قياس $(\hat{a})$ $\neq$ قياس $(\hat{b})$ $\neq$ قياس $(\hat{c})$

$bc \neq ac$ $\Rightarrow$ قياس $(\hat{a})$ $\neq$ قياس $(\hat{b})$

$ac \neq ab$ $\Rightarrow$ قياس $(\hat{b})$ $\neq$ قياس $(\hat{c})$

أذن $ab \neq bc \neq ac$

أذن المثلث غير متساوى الأضلاع .

## ٣ – البرهان بالتناقض Proof by Contradiction

لإثبات صحة التقرير $p \to q$ فإننا أحيانا نلجأ إلى افتراض جدلى بـــأن التقريـــر $p \to q$ خاطئ وبالتالى فإن نفيه $\sim (p \to q)$ يكون صواب، وحيث أن

$$\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن من التكافؤ ينتج أن التقرير $p \wedge \sim q$ صواب ومن تعريف أداة الوصل فـــإن كـــل من $\sim q$ , $p$ يكون صواب، أى إن $q$ يكون خطأ وهذا يقودنا إلى أسلوب البرهـــان بالتناقض حيث نبدأ البرهان بافتراض أن النتيجة المطلوبة $q$ تكون تقريـــر خطـــأ وبالتـــالى يكون $\sim q$ صواب ثم نستخدم هذا الفرض والمعطيات فى إثبات أن ذلك يؤدى إلى الوقـــوع فى تناقض حيث نصل إلى تقرير ما يكون صائبا وخاطئا فى آن واحد وهذا مستحيل ويكـــون سبب هذا التناقض هو افتراضنا بأن نفى المطلوب صحيح، وبالتالى فإن المخرج الوحيد من هذا التناقض هو التسليم بأن $p \wedge \sim q$ تقرير خاطئ وبالتالى التقرير المكافئ له $\sim (p \to q)$ هو الآخر تقرير خاطئ وهذا يعنى أن $p \to q$ تقرير صـــائب، أى إن التضمـــين $p \Rightarrow q$ متحقق وبذلك يتم البرهان بأسلوب التناقض.

مثال ١٠ : باستخدام البرهان بالتناقض اثبت صحة ما يأتي:

المعطيات : $p \; , \; q \; , \; p \vee q \to r$

المطلوب : $r$

الحل :

المعطيات جميعها صواب

وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب يكون صواب، أى إن $\sim r$ صواب أذن $r$ يكون خطأ.

وحيث أن $p \vee q \to r$ صواب ( من المعطيات )

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن $p \vee q$ خطأ

ومن تعريف أداة الفصل ينتج أن $q$ , $p$ خطأ وهذا يناقض المعطيات التى تقـــول أن $q$ , $p$ صواب وبالتالى الفرض يكون خطأ، أى إن $r$ تقرير صواب.

مثال ١١ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا"

الحل : نفرض التقرير $p$ : " المثلث متساوى الأضلاع "

والتقرير $q$ : " المثلث متساوى الزوايا "

أذن المعطيات هى أن $p$ صائب والمطلوب إثبات أن $q$ صائب، أى إن المطلوب هو إثبـــات صحة التضمين $p \Rightarrow q$ وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصــواب أى نفرض أن $\sim q$ صواب، وحيث أن $\sim q$ هو التقرير "المثلث غير متساوى الزوايـــا " أذن فى المثلث $abc$

قياس $(\hat{a}) \neq$ قياس $(\hat{b}) \neq$ قياس $(\hat{c})$

$bc \neq ac \Rightarrow$ قياس $(\hat{a}) \neq$ قياس $(\hat{b})$

$ac \neq ab \Rightarrow$ قياس $(\hat{b}) \neq$ قياس $(\hat{c})$

أذن $ab \neq bc \neq ac$ وهذا تناقض مع المعطيات $p$ الـــتى تقــول أن المثلـــث متســـاوى الأضلاع. أذن الفرض بأن المثلث غير متساوى الزوايا يكون خاطئ وبالتالى فإن الصواب هـــو أن المثلث متساوى الزوايا.

مثال ١٢ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان $x^2$ عددا فرديا فإن $x$ عدد فردى"

الحل : نفرض التقرير $p$ : " $x^2$ عدد فردى "

والتقرير $q$ : " $x$ عدد فردى "

أذن المعطيات هى أن $p$ صائب والمطلوب إثبات أن $q$ صائب، أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q$ وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب أى نفرض أن $\sim q$ صواب، وحيث أن $\sim q$ هو التقرير " $x$ عدد غير فردى" أى إن $x$ عدد زوجى، أذن

وفقا لأسلوب البرهان بالتناقض

$x$ عدد زوجى $\Rightarrow \quad x = 2n$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4n^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 2\left(2n^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 2m \qquad , \qquad m = 2n^2$$

$\Rightarrow$ $x^2$ عدد زوجى

أى أننا حصلنا على $x^2$ عدد زوجى وهذا يناقض المعطيات $p$ التى تقول أن $x^2$ عدد فردى. أذن الفرض بأن $x$ عدد غير فردى يكون فرض خاطئ وبالتالى فإن الصواب هو أن $x$ عدد فردى.

مثال ١٣ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان حاصل ضرب عددين طبيعيين $x , y$ عددا فرديا فإن كلا من $x , y$ عدد فردى"

الحل : نفرض التقرير $p$ : "حاصل ضرب عددين طبيعيين $x , y$ يكون عددا فرديا"

والتقرير $q$ : " $x$ عدد فردى "

والتقرير $r$ : " $y$ عدد فردى "

أذن المعطيات : التقرير $p$ صائب

المطلوب : إثبات أن كلا من $q , r$ صائب (أى المطلوب إثبات أن التقرير $q \wedge r$ صائب)

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين $p \Rightarrow q \wedge r$ وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، أى نفرض ان $\sim(q \wedge r)$ صواب.

وحيث أن $\sim(q \wedge r) \equiv \sim q \vee \sim r$

أذن نفى التقرير "كلا من x , y عدد فردى" هو التقرير

" x عدد غير فردى أو y عدد غير فردى" وهذا يكافئ "x عدد زوجى أو y عدد زوجى"

وحيث أن حاصل ضرب عدد زوجى بآخر فردى أو زوجى يكون عدد زوجى. أذن التقرير p يكون خطأ وهذا يناقض المعطيات p التى تقول أن "حاصل ضرب العددين الطبيعيين x , y عددا فرديا". أذن الفرض يكون خاطئ وبالتالى فإن الصواب هو أن كلا من x , y عدد فردى وهذا يثبت صحة التضمين $p \Rightarrow q \wedge r$ .

مثال ١٤ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} \qquad \forall\ x > 0$$

الحل : المعطيات : $x > 0$

المطلوب إثبات أن : $\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$

باستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، أى نفرض أن $\frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x+2}$

وحيث أن $x > 0$ ( من المعطيات ). أذن

$$x(x+2) \geq (x+1)(x+1) \Rightarrow x^2 + 2x \geq x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow 0 \geq 1$$

أى أننا حصلنا على تناقض، أذن الفرض يكون خاطئ وبالتالى فإن الصواب هو أن $\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$ .

## ٤ – البرهان بالمثال المعاكس Proof by Counter example

بعض التقارير الرياضية يكفى لتوضيح صوابها أو خطئها أن نعطى مثالا نؤيد به أجابتنا وهـــذه الطريقة تسمى البرهان بالمثال المعاكس والمقصود بالمثال المعاكس هو مثال القصد منـــه أبطـــال ادعاء حول قضية معينة وقد يكون لدينا مثال أو اكثر لهدم القضية ولكن الحد الأدنى هو إعطاء مثال واحد، والمثال المعاكس لا يعطى برهانا للقضية ولكن يبطل إدعاء قضية معينة عن طريـــق إعطاء تناقض يعاكس هذا الإدعاء .

ملاحظة :

**إذا أردنا إثبات قضية ما فعلينا برهنتها فى جميع الحالات وليس بمثال خاص بينما إذا أردنا أن ننقضها أو نقيم الدليل على عـــدم صحتها فيكفى إعطاء مثال معاكس واحد على الأقل .**

فمثلا التقرير " $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$ حيث $x , y \neq 0$ أعداد حقيقية"

لا يمكن إثباته عن طريق اخذ مثال يحققه مثل $x = 1 , y = 1$ ولكن يمكن إقامة الدليل على عدم صحة هذا التقرير بأخذ المثال $x = 3 , y = 2$ لأن $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ وهـــذا يعتـــبر مثـــال معاكس يثبت أن التقرير المعطى خاطئ.

مثال ١٥ : ناقش صحة التقرير $\forall x \in R , |x| \neq 0$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = 0$ ، وحيث أن $|0| = 0$

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٦ : ناقش صحة التقرير $\forall\ x \in R\ ,\ x^2 > x$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = \frac{1}{2}$ ، وحيث أن $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٧ : ناقش صحة التقرير

$(x - y)^2 \neq x^2 + y^2$ حيث $x , y$ عددين حقيقيين.

الحل :

بإعطاء مثال معاكس، نأخذ المثال $y = 2\ ,\ x = 3$

$$(x - y)^2 = (3 - 2)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 9 + 4 = 13$$

أذن $(x - y)^2 \neq x^2 + y^2$ تقرير صواب.

مثال ١٨ : أوجد مثال معاكس للتقرير $\forall\ x \in B\ ,\ x + 5 > 15$

حيث $B = \{6 , 8 , 10 , 12 , 14\}$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = 6$ ، وحيث أن $6 + 5 \leq 15$ أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٩ : ناقش صحة التقرير

"لآى عدد طبيعى $n$ يكون $6n - 1$ عددا أوليا"

الحل :بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $n = 6$ ، أذن

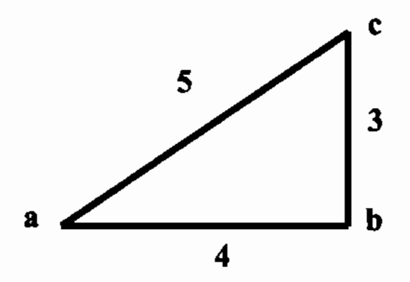
$$6n - 1 = 36 - 1 = 35$$

وحيث أن 35 عدد غير أولى. أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ٢٠ : ناقش صحة التقرير

"إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوى الأضلاع"

الحل :




بإعطاء مثال معاكس نفرض المثلث abc فيه

$ab = 4 \ , \ bc = 3 \ , \ ac = 5$

حيث أن

$$(ab)^2 + (bc)^2 = (ac)^2$$

أذن المثلث قائم الزاوية ولكنه غير متساوى الأضلاع

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

## ٥ - البرهان بالاستقراء الرياضى (الاستنتاج الرياضى)
## Proof by Mathematical Induction

البرهان بالاستقراء الرياضي يعتبر أسلوب قوى فى برهان الكثير من النظريات والمسائل فى الرياضيات والتى تتعلق بأعداد صحيحة موجبة، فمثلا لإثبات صحة التقرير

$$P(n) \equiv 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1) \ , \ \forall \ n \in N$$

نلاحظ بالتجريب أن

$$P(1) \equiv 2 = 1(1+1) = 2$$
$$P(2) \equiv 2 + 4 = 2(2+1) = 6$$
$$P(3) \equiv 2 + 4 + 6 = 3(3+1) = 12$$
$$P(4) \equiv 2 + 4 + 6 + 8 = 4(4+1) = 20$$
$$P(5) \equiv 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5(5+1) = 30$$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ولبحث صحة التقرير فى حالة $n > 5$ فإن أسلوب التجريب الذى اتبعناه لن ينتهى كما أنه لا نستطيع أن ندعى بأن التقريـر

صواب لجميع قيم $n > 5$ لان هذا سيكون مجرد تخمين غير مقبول فى الرياضيات ولذلك لابد من البحث عن أسلوب آخر غير التجريب لإثبات مثل هذه المسائل الرياضية.

تعريف ٢ : إذا كانت $S \subset N$ حيث $N$ مجموعة الأعداد الطبيعية فإن $S$ تسمى مجموعة استقرائية إذا تحقق

$$n \in S \quad \Rightarrow \quad n+1 \in S$$

مثال ٢١ : المجموعات الآتية تمثل مجموعات استقرائية

1- $A = \{1, 2, 3, \ldots \}$

2- $B = \{6, 7, 8, \ldots \}$

3- $C = \{n \in N \mid n \geq 9\}$

4- $D = \{n+1 \mid n \in N\}$

والمجموعات الآتية تمثل مجموعات غير استقرائية

5- $E = \{4, 6, 8, \ldots \}$

6- $F = \{n \in N \mid 5 \leq n \leq 20000\}$

7- $G = \{n^2+1 \mid n \in N\}$

8- $S = \{k \in N \mid k \leq 2^{100}\}$

نظرية ١ : مبدأ الاستقراء ( الاستنتاج ) الرياضي

إذا كانت $S \subset N$ تحقق الشرطين التاليين

1)- $1 \in S$

2)- $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

فإن $S = N$.

البرهان : المعطيات هى $S \subset N$ تحقق الشرط $1 \in S$ وتحقق الشـرط $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ والمطلوب إثبات أن $S = N$ . نفرض أن المجموعة D هى مكملة المجموعة S بالنسـبة إلى المجموعة الشاملة N ، أى إن $D = N - S$. أذن يوجد حالتان فقط

الحالة الأولى: $D = \Phi$ وفى هذه الحالة تكون النظرية صحيحة لأن $D = \Phi \Rightarrow S = N$

الحالة الثانية : $D \neq \Phi$ وهذا يعنى أن المجموعة S محتواه بالكامل داخل المجموعة N ، أى إن

$$\exists\ k \in N \ :\ k \notin S$$

والآن نحاول إثبات خطأ هذا الإدعاء. حيث أن $1 \in S$ ( من المعطيات )

نفرض أن $m \neq 1$ هو أصغر عدد صحيح موجب ينتمى إلى المجموعة D، أى إن $m \notin S$ ، ومن تعريف الفرق بين مجموعتين فإن العدد الذى يسبق العدد m مباشرة ينتمـى إلى S ، أى إن $m-1 \in S$ ولكن من الشرط الثانى من المعطيات نجد أن $m\text{-}1 \in S \Rightarrow m \in S$ وهـذا يؤدى إلى تناقض حيـث $m \notin S$ وفى نفـس الوقت $m \in S$ ومـن ذلـك نسـتنتج أن الفرض $D \neq \Phi$ فرض خاطئ أى إن $D = \Phi$ وبالتالى $S = N$.

ملاحظات :

١ - لكى نثبت صحة التقرير $P(n)$ حيث $n \in N$ فإنه وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى (نظرية (١) ) فإنه لابد من التحقق من الشرطين الآتيين معا:
الشرط الأول : عند $n = 1$ فإن التقرير $P(1)$ صواب
الشرط الثانى : بفرض أن $P(n)$ صائب عند $n = k$ فإن ذلك يؤدى إلى أن التقرير $P(k+1)$ صائب أيضا، أى إن
$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

٢ - إذا لم يتحقق أحد الشرطين فإن $P(n)$ تكون تقرير خاطئ.

٣ - إذا كان التقرير $P(n)$ صائب فى حالة $n = \ell$ (بدلا مـن $n = 1$) وكـان الشـرط الثانى متحقق فـإن التقريـر $P(n)$ يكـون صـائب لجميـع قيم $n \geq \ell$.

مثال ٢٢ : استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي فى إثبات صحة التقرير

$$P(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \quad \dots \quad + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall\, n \in N$$

الحـــل :

أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n = 1$

بوضع $n = 1$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $P(n) = 1$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير $P(n)$ فى حالة $n = k$

ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$

أى نفرض أن

$$1 + 2 + 3 + \quad \dots \quad + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1 + 2 + 3 + \quad \dots \quad + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

والآن بإضافة $(k+1)$ إلى طرف المعادلة ( ١ ) نحصل على

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \quad \dots \quad + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = k + 1$ .

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير $P(n)$ صواب لكل $n \in N$ .

مثال ٢٣ : باستخدام البرهان بالاستقراء الرياضى بين ما إذا كان التقرير الآتى صواب أم خطأ

$$P(n) \equiv 1+3+5+ \quad \dots \quad +(2n-1) = 3n-1 \qquad \forall \ n \in N$$

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n = 1$

بوضع $n = 1$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $P(n) = 1$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n) = 3 - 2 = 1$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير فى حالة $n = k$ ونحاول إثبات صحة التقرير فى حالة $n = k + 1$

أى نفرض أن

$$1 + 3 + 5 + \quad \dots \quad + (2k - 1) = 3k - 2 \qquad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1 + 3 + 5 + \quad \dots \quad + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = 3(k + 1) - 2$$

والآن بإضافة $(2(k+1) - 1)$ إلى طرفى المعادلة ( ١ ) نحصل على

$$\begin{aligned} 1+3+5+ \quad \dots \quad +(2k-1)+(2(k+1)-1) &= 3k-2+(2(k+1)-1) \\ &= 3k - 2 + 2k + 2 - 1 \\ &= 5k - 1 \\ &\neq 3(k + 1) - 2 \end{aligned}$$

أذن التقرير $P(n)$ غير متحقق فى حالة $n = k + 1$ أى إن الشرط الثانى من الاستقراء الرياضى غير متحقق وبالتالى فإن التقرير $P(n)$ يكون خطأ.

**مثال ٢٤ :** استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي فى إثبات صحة التقرير

$$1\times2\times3 + 2\times3\times4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall n \in N$$

**الحـــل :**

**أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n = 1$**

بوضع $n = 1$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $= 1\times2\times3 = 6$

الطرف الأيمن من التقرير $= \frac{1\times2\times3\times4}{4} = 6$

أذن التقرير صواب فى حالة $n = 1$

**ثانيا : نفرض صحة التقرير فى حالة $n = k$ ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$**

أى نفرض أن

$$1\times2\times3 + 2\times3\times4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1\times2\times3 + 2\times3\times4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

والآن بإضافة $(k+3)(k+2)(k+1)$ إلى طرفى المعادلة ( ١ ) نحصل على

$$1\times2\times3 + 2\times3\times4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

أذن التقرير صواب فى حالة $n = k + 1$ .

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير صواب لكل $n \in N$ .

مثال ٢٥ : برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير

$$P(n) \equiv \quad 2^n \le n! \qquad \forall \quad n \ge 4$$

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير $P(n)$ فى حالة $n = 4$

بوضع $n = 4$ فإن

الطرف الأيسر من التقرير $P(n) = 2^4 = 16$

الطرف الأيمن من التقرير $P(n) = 4! = 24$

أذن $2^4 \le 4!$ وبالتالى التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = 1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير $P(n)$ فى حالة $n = k \ge 4$

ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$

أى نفرض أن $2^k \le k!$ ونحاول إثبات ان $2^{k+1} \le (k+1)!$ من خـــواص المتباينات

$$k \ge 4 \quad \Rightarrow \quad k+1 > 4 > 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < k+1$$

والآن من الفرض

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \le 2(k!) \le (k+1)(k!) = (k+1)!$$

أذن التقرير $P(n)$ صواب فى حالة $n = k + 1$ .

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير $P(n)$ صواب لكل $n \ge 4$ .

مثال ٢٦ : برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير

"العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 لكل $n \in N$ "

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير فى حالة $n = 1$

بوضع $n = 1$ نلاحظ أن $3^1 - 1 = 2$ يقبل القسمة على 2 وبالتالى التقرير صواب فى حالة $n = 1$ .

ثانيا : نفرض صحة التقرير فى حالة $n = k$ ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$
أى نفرض أن العدد $3^k - 1$ يقبل القسمة على 2 ونحاول إثبات أن $3^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 2. ومن قابلية القسمة بالفرض فإنه يوجد عدد m بحيث أن $3^k - 1 = 2m$ وبضرب الطرفين فى 3. أذن

$$3^{k+1} - 3 = 6m \Rightarrow 3^{k+1} - 1 = 6m + 2 = 2(3m + 1) = 2\ell$$

حيث $\ell = 3m + 1$ وبالتالى ينتج أن التقرير صواب فى حالة $n = k + 1$ وبالتالى صواب لكل $n \in N$ .

# تمارين الفصل السادس

١ - اثبت صحة كل مما يأتى باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض :

| | |
|---|---|
| ١ - المعطيات : | $p \; , \; q \; , \; p \wedge q \rightarrow r$ |
| المطلوب : | $r$ |
| ٢ - المعطيات : | $\sim p \; , \; \sim q \; , \; q \vee r \rightarrow p$ |
| المطلوب : | $\sim r$ |
| ٣ - المعطيات : | $p \rightarrow q \; , \; \sim r \rightarrow \sim q$ |
| المطلوب : | $\sim r \rightarrow \sim p$ |
| ٤ - المعطيات : | $\sim p \veebar \sim q \; , \; q$ |
| المطلوب : | $\sim p$ |
| ٥ - المعطيات : | $p \rightarrow q \; , \; \sim p \rightarrow r \; , \; r \rightarrow s \; , \; s$ |
| المطلوب : | $\sim q \rightarrow s$ |

٢ - اثبت صحة كلا من الحجج الآتية باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض:

1 – $(p \rightarrow \sim q), \sim p \;\; \alpha \;\; \sim q$

2 – $(p \leftrightarrow q), q \;\; \alpha \;\; p$

3 – $(p \rightarrow \sim q), (r \rightarrow q), r \;\; \alpha \;\; \sim p$

4 – $(p \rightarrow \sim q), (\sim r \rightarrow \sim q) \;\; \alpha \;\; (p \rightarrow \sim r)$

5 – $(p \rightarrow q), (r \rightarrow \sim q) \;\; \alpha \;\; (r \rightarrow \sim p)$

٣ - اثبت صحة كل مما يأتى باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض :

1 - $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

2 - $(q \to p) \wedge \sim p \Rightarrow \sim q$

3 - $((p \vee q) \to (p \wedge q)) \wedge p \Rightarrow q$

4 - $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r) \Rightarrow r$

5 - $(p \to q) \wedge (r \to q) \Rightarrow (p \vee r \to q)$

٤ - باستخدام البرهان المباشر أوجد الاستنتاج المناسب لكل من المقدمات المنطقيــة التاليــة، بحيث تكون الحجة ملزمة :

1 - $(p \to \sim q)$, $q$

2 - $(p \leftrightarrow q)$, $(r \to \sim p)$

3 - $(p \to \sim q)$, $(\sim p \to r)$

4 - $(r \to p)(q \to \sim p)$, $r$

5 - $(p \to q)$, $(\sim r \to \sim q)$, $(r \to \sim s)$

٥ - اثبت صحة كل مما يأتى باستخدام البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهـــان بالتناقض :

١ - $x$ عددا زوجيا شرط ضرورى لكى يكون $x^2$ عددا زوجيا .

٢ - إذا كان $x = 4$ فإن $x^2 = 16$ .

٣ - إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .

٤ - إذا كان $x$ عددا زوجيا فإن $x + 1$ عدد فردى .

٥ - حاصل ضرب عددين زوجيين يكون عدد زوجى .

٦ - الزاوية المحيطية نصف الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس .

٧ - العمود النازل من مركز الدائرة على أى وتر فيها ينصفه .

٨ - الزاوية الخارجة لأى مثلث تساوى مجموع الزاويتين الداخليتين فى المثلث ماعدا المجاورة.

٩ - المعادلة $2x + 1 = 0$ ليس لها حل إذا كان $x$ تنتمى فى مجموعة الأعداد الطبيعية.

١٠ - إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $\frac{c + 4b}{d} = \frac{ad + 4b^2}{bd}$ .

٦ - إذا كان $b$ , $a$ أعداد زوجية فباستخدام البرهان المباشر أثبت أن كل مما يأتى عدد زوجى:

$$a + b \ , \ a\,b \ , \ 2a + 3b \ , \ a^2 + b^2 \ , \ (a + 2)^2 + b^2$$

٧ - باستخدام البرهان بالتناقض أثبت كلا مما يأتى :

١ - العدد $\sqrt{2}$ عدد غير نسبى .

٢ - المستقيم الواصل بين منتصفين ضلعين فى المثلث يوازى الضلع الثالث ويساوى نصفه.

٣ - فى المثلث $abc$ إذا كان $ab \neq ac$ فإن $\hat{b} \neq \hat{c}$ .

٤ - حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردى.

٥ - مجموع عددين فرديين هو عدد زوجى.

٨ - برهن على صحة كلا من الحجج الآتية باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض .

| |
|---|
| ١ - سقوط المطر شرط كافى لنمو المزروعات .<br>المزروعات لم تنمو .<br>أذن المطر لم يسقط . |
| ٢ - سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء .<br>إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة . |

| |
|---|
| المطر يسقط والشباب يجدون فرص عمل جديدة .<br>أذن الصحراء يتم تعميرها . |
| ٣ - إذا درس الطالب منهج الرياضيات بفهم فإنه سوف يجتاز الامتحان بتفوق .<br>الطالب لم يجتاز الامتحان بتفوق .<br>أذن الطالب لم يدرس منهج الرياضيات بفهم . |
| ٤ - إذا كانت الدالة $f$ قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة .<br>الدالة $f$ قابلة للتفاضل .<br>أذن الدالة $f$ متصلة . |
| ٥ - إذا كانت الدالة $f$ غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للتفاضل .<br>الدالة $f$ قابلة للتفاضل .<br>أذن الدالة $f$ متصلة . |
| ٦ - إذا كانت الدالة $f$ قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة .<br>الدالة $f$ غير متصلة .<br>أذن الدالة $f$ غير قابلة للتفاضل . |
| ٧ - تساوى أضلاع المثلث شرط ضرورى وكافى لتساوى زوايا المثلث .<br>المثلث زوياه مختلفة .<br>أذن المثلث أضلاعه مختلفة . |

٩ - ناقش صحة كل من التقارير الآتية :

١ - إذا كان $n$ عددا فرديا فإن $n+1$ عددا زوجيا.

٢ - إذا كان $n$ عددا أوليا فإن $2^2+1$ عددا أوليا.

٣ - كل الأعداد الفردية تكون أعداد أولية.

٤ - حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد غير زوجى.

٥ - مجموع عددين زوجيين هو عدد فردى.

٦ - لكل عدد طبيعي n فإن العدد $n^2 + n + 41$ يكون عدد أولى.

٧ - $(x+1)^2 = x^2 + x + 1$ حيث x عدد حقيقي .

٨ - $(x+1)^2 \neq x^2 + x + 1$ حيث x عدد حقيقي.

٩ - $(x-y)^2 \neq x^2 - y^2$ حيث x , y عددين حقيقيين.

١٠ - $x - y = y - x$ حيث x , y عددين حقيقيين.

١١ - كل الأعداد الفردية تقبل القسمة على3 أو 5 .

١٢ - بعض الأعداد الأولية تكون أعداد زوجية .

١٣ - كل الأعداد الزوجية تكون أعداد غير أولية .

١٤ - يوجد عدد حقيقيx بحيث أن $\log(x) < 0$ .

١٥ - لكل عدد حقيقي x فإن $|x| = -x$ .

١٠ - نفرض المجموعة $B=\{2,4,6,8\}$ . ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام المثال المعاكس:

1- $\forall\ x \in B\ ,\ x - 4 > 0$

2- $\forall\ x \in B\ ,\ x^2 < 2^x$

3- $\exists\ x \in B\ :\ x! = 6$

4- $\exists\ x \in B\ :$ x عدد غير زوجي

5- $\forall\ x, y \in B\ ,\ x+y \geq x^2 - y^2$

6- $\exists\ x \in B\ :$ x عامل من عوامل العدد $3!$

١١ - نفرض أن $A=\{1,2,3,4,5\}$ . ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام المثال المعاكس:

1 – $\forall\ x, y \in A\ ,\ x^2 + y^2 > 5$

2 – $\exists\ x, y \in A\ ,\ x + y < 6$

3 – $\exists\ y \in A\ :\ \forall\ x \in A\ ,\ 3x + y > 12$

4 – $\forall\ x \in A\ ,\ \exists\ y \in A :\ x + 2y < 10$

$$5 - \quad \forall\ x\ ,\ y \in A :\ x^2 - y \geq 1$$

١٢ – ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام البرهان بالمثال المعاكس:

1) $(\forall\ n \in N)(n - 1 \geq 2)$

2) $\exists x \in R : x^2 - 9 = 0$

3) $(\forall\ n \in N)\left(n^2 < 2^n\right)$

4) $\exists\ n \in N\ :\ 50 \leq n^2 < 90$

5) $\forall x \in (0,1]\ ,\ x^2 < 1$

6) $\exists x \in (0,2] :\ x^2 < x$

7) $\exists\ n \in N\ :\ \left(n^2 - 14 > 0\right) \wedge \left(n^3 < 70\right)$

8) $\forall\ n \in N\ ,\ \left(n^2 \leq 20\right) \wedge \left(n^3 > 3\right)$

9) $\forall\ n \in \{1,2,3,4,5\},\ \left(n^2 \leq 21\right) \vee \left(n^3 > 130\right)$

10) $\forall\ n \in \{1,2,3,4,5\},\ n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 30$

١٣ – استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي ف إثبات صحة كل من التقارير الآتية :

1 ) $P(n) \equiv 1 + 4 + 7 + \ \ldots\ + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2} \qquad \forall\ n \in N$

2 ) $P(n) \equiv 4 + 8 + 12 + \ \ldots\ + 4n = 2n(n+1) \qquad \forall\ n \in N$

3 ) $P(n) \equiv 1^2 + 2^2 + \ \ldots\ + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in N$

4 ) $P(n) \equiv 1^3 + 2^3 + \ \ldots\ + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall n \in N$

5 ) $P(n) \equiv \dfrac{1}{1\text{x}2} + \dfrac{1}{2\text{x}3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)} \qquad \forall n \in N$

١٤ - برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير $P(n) \equiv 2^n > 2n+1 \quad \forall\ n \geq 3$

١٥ - برهن بالاستقراء الرياضي صحة كل من التقارير الآتية :

١ - $n^3 - n + 3$ يقبل القسمة على 3 لكل $n \in N$ .

٢ - $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3 لكل $n \in N$

٣ - $3^n - 1$ عدد زوجي لكل عدد طبيعي $n \geq 3$ .

٤ - $n^3 - n + 1 > n^2$ لكل عدد طبيعي $n > 1$ .

٥ - $3^n + 2^n$ عدد فردى لكل عدد طبيعي $n \in N$ .

الفصل



# الجبر البوولى

# Boolean Algebra

## ١ - جبر بـــوول

المجموعات والافتراضات لها نفس الخواص وتحقق قوانين متماثلة وهذه القوانين تم اســـتخدامها لتعريف نظام رياضى يسمى الجبر البوولى نسبة إلى العالم الرياضى جـــورج بـــوول George Boole، و الجبر البوولى هو أحد أشكال المنطق الرمزى والذى يبين كيفية عمل أدوات الربط المنطقية.

تعريف ١ : جبر بوول هو مجموعة B غير خالية وعملية جمع يرمز لها + وعملية ضرب يرمـــز لها * بحيث تتحقق الشروط الآتية :

$B_0$ : قانون الانغلاق **Closure law**

لكل $a , b \in B$ فإن $a * b \in B$ , $a + b \in B$

$B_1$ : قانون الإبدال **Commutative law**

لكل $a , b \in B$ فإن

$$a * b = b * a \quad , \quad a + b = b + a$$

$B_2$ : قانون التجميع **Associative law**

لكل $a , b , c \in B$ فإن

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad , \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$B_3$ : قانون التوزيع Distributive law

لكل $a , b , c \in B$ فإن

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$
$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

$B_4$ : قانون الوحدة Identity law

المجموعة B تحتوى على العنصر المحايد الجمعى ويرمز له بالرمز O وتحتوى على العنصر المحايد للضرب ويرمز له بالرمز U بحيث أن لكل $a \in B$ فإن

$$a + O = a \quad , \quad a * U = a$$

$B_5$ : قانون المكملة Complement law

لكل $a \in B$ يوجد $a' \in B$ يسمى مكملة a بحيث أن

$$a + a' = U \quad , \quad a * a' = O$$

ونظام جبر بوول يرمز له بالثلاثية $(B , + , *)$ .

ونلاحظ من قانون التوزيع $B_3$ أن المتطابقة الأولى

$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

لا تمثل متطابقة فى الجبر العادى بينما المتطابقة الثانية

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

تمثل متطابقة فى الجبر العادى. وعملية المكملة لها الأسبقية على عملية الضرب وكذلك عملية الضرب لها الأسبقية على عملية الجمع فمثلا

$a + b * c$ تعنى $a + (b * c)$ وليس $(a + b) * c$

$a * b'$ تعنى $a * (b')$ وليس $(a * b)'$

وفى كثير من الأحيان يمكن الاستغناء عن الرمز * ونستخدم التجاور بدلا من ذلك، فمثلا

قانون الإبدال $a * b = b * a$

يمكن التعبير عنه بالصورة $a\,b = b\,a$

وقانون التوزيع $B_3$ يمكن التعبير عنه بالصورة

$$a + (b\ c) = (a + b)(a + c)$$
$$a(b + c) = a\ b + a\ c$$

مثال ١ : نفرض $B = \{0, 1\}$ وعمليتى الجمع والضرب معرفتان بالنسبة إلى B بالجدولين الآتيين

| * | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

اثبت أن النظام $(B, +, *)$ يكون جبر بوول.

الحـل :

$B_0$ : قانون الانغلاق متحقق لان جميع العناصر داخل كل جدول تنتمى فى المجموعة B ، أى إن لكل $a, b \in B$ فإن $a * b \in B$ , $a + b \in B$

$B_1$ : قانون الإبدال متحقق بالنسبة لعمليتى الجمع والضرب وهذا واضح من التماثل فى كل جدول، أى إن لكل $a, b \in B$ فإن

$$a * b = b * a \quad , \quad a + b = b + a$$

$B_2$ : قانون التجميع متحقق على الأعداد.

$B_3$ : قانون التوزيع متحقق على الأعداد.

$B_4$ : قانون الوحدة متحقق ومن الجدولين واضح أن

العنصر المحايد الجمعى O بالنسبة لعملية الجمع هو 0

العنصر المحايد الضربى U بالنسبة لعملية الضرب هو 1

$B_5$ : قانون المكملة متحقق وفى الجدول الآتى نوضح انه لكل $a \in B$ يوجد المكملة $a' \in B$ بحيث أن $a * a' = O$ , $a + a' = U$

| $a \in B$ | $a' \in B$ | $a + a'$ | $a * a'$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |

أذن النظام $(B, +, *)$ يكون جبر بوول .

مثال ٢ :نفرض المجموعة الشاملة $A = \{a, b\}$ والمجموعة $B = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, A\}$ .

أثبت أن النظام $(B, \cup, \cap)$ يكون جبر بوول حيث عمليق الجمع والضرب هما الاتحاد والتقاطع فى المجموعات.

الحل : نكون جدول عملية الاتحاد وجدول عملية التقاطع

| $\cap$ | $\Phi$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| $\phi$ | $\Phi$ | $\Phi$ | $\Phi$ | $\Phi$ |
| $\{a\}$ | $\Phi$ | $\{a\}$ | $\Phi$ | $\{a\}$ |
| $\{b\}$ | $\Phi$ | $\Phi$ | $\{b\}$ | $\{b\}$ |
| $A$ | $\Phi$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $A$ |

جدول عملية التقاطع $\cap$

| $\cup$ | $\Phi$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Phi$ | $\Phi$ | $\{a\}$ | $\{b\}$ | $A$ |
| $\{a\}$ | $\{a\}$ | $\{a\}$ | $A$ | $A$ |
| $\{b\}$ | $\{b\}$ | $A$ | $\{b\}$ | $A$ |
| $A$ | $A$ | $A$ | $A$ | $A$ |

جدول عملية الاتحاد $\cup$

$B_0$ : قانون الانغلاق متحقق لان جميع العناصر داخل كل جدول تنتمى فى المجموعة B.

$B_1$ : قانون الإبدال متحقق على المجموعات، حيث أنه لأى مجموعتين $X, Y$ يتحقق أن

$$X \cup Y = Y \cup X \quad , \quad X \cap Y = Y \cap X$$

وهذا واضح من التماثل فى كل جدول.

$B_2$ : قانون التجميع متحقق على المجموعات، حيث أنه لأى مجموعات $X, Y, Z$ يتحقق أن

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cap Z$$

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

$B_3$ : قانون التوزيع متحقق على المجموعات، حيث أنه لأى مجموعـــات $X$ , $Y$ , $Z$ يتحقق أن

$$X \cup ( Y \cap Z ) = ( X \cup Y ) \cap ( X \cup Z )$$
$$X \cap ( Y \cup Z ) = ( X \cap Y ) \cup ( X \cap Z )$$

$B_4$ : قانون الوحدة متحقق ومن الجدولين واضح أن العنصر المحايد الجمعى $O$ بالنسبة لعملية الاتحاد هو $\Phi$ والعنصر المحايد الضربى $U$ بالنسبة لعملية التقاطع هو $A$ .

$B_5$ : قانون المكملة متحقق وفى الجدول الآتى نوضـــح انــه لكـــل $X \in B$ يوجـــد المكملة $X' \in B$ بحيث أن

$$X \cup X' = U = A \quad , \quad X \cap X' = O = \Phi$$

| $X \in B$ | $X' \in B$ | $X \cup X'$ | $X \cap X'$ |
|---|---|---|---|
| $\Phi$ | $A$ | $A$ | $\Phi$ |
| $\{a\}$ | $\{b\}$ | $A$ | $\Phi$ |
| $\{b\}$ | $\{a\}$ | $A$ | $\Phi$ |
| $A$ | $\Phi$ | $A$ | $\Phi$ |

أذن النظام $( B , \cup , \cap )$ يكون جبر بوول.

مثال ٣ : نفرض أن $B$ مجموعة من الافتراضات التى تتولد من التقارير . . . , $p , q$. النظام $( B , \vee , \wedge )$ يكون جبر بوول حيث $\wedge$ , $\vee$ هى أدوات الربط المنطقية (أداة الوصل وأداة الفصل).

الحـــل :

$B_0$ : قانون الانغلاق متحقق حيث أن $B$ تتولد من التقارير $p , q , \ldots$ ولكل تقـارير

$$p \, , \, q \in B$$

فإن $p \wedge q \in B$ , $p \vee q \in B$

$B_1$ : قانون الإبدال متحقق على الافتراضات ، حيث أنه لأى $p\ ,\ q \in B$ فإن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$B_2$ : قانون التجميع متحقق على الافتراضات، حيث أنه لأى $p\ ,\ q\ ,\ r \in B$ فإن

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$B_3$ : قانون التوزيع متحقق على الافتراضات، حيث أنه لأى $p\ ,\ q\ ,\ r \in B$ فإن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$B_4$ : قانون الوحدة متحقق و العنصر المحايد الجمعى $O$ بالنسبة لأداة الوصل $\vee$ هــو تقرير $f$ خاطئ منطقيا فى مجموعة الافتراضات $B$ ويحقق

$$p \vee f \equiv p \quad \text{لأى} \quad p \in B$$

والعنصر المحايد الضربى $U$ بالنسبة لأداة الفصل $\wedge$ هو تقرير $t$ صائب منطقيــــا فى مجموعة الافتراضات $B$ ويحقق

$$p \wedge t \equiv p \quad \text{لأى} \quad p \in B .$$

$B_5$ : قانون المكملة متحقق لأنه لكل $p \in B$ يوجد $\sim p \in B$ بحيث أن

$$p \vee \sim p \equiv t \qquad , \qquad p \wedge \sim p \equiv f$$

أى أن النفى يمثل المكملة . أذن النظام $(B , \vee , \wedge)$ يكون جبر بوول.

مثال ٤ : نفرض المجموعة $X_{30} = \{1 , 2 , 3 , 5 , 6 , 10 , 15 , 30\}$ وهى مجموعة قواسم العدد 30 ونعرف عملية جمع $\oplus$ وعملية ضرب $\otimes$ على المجموعة $X_{30}$ كالآتى:

المضاف المشترك الأصغر للعددين $a \oplus b = LCM(a , b)$

القاسم المشترك الأعلى للعددين $a \otimes b = GCD(a , b)$

أثبت ان النظام $(X_{30} , \oplus , \otimes)$ يكون جبر بوول.

الحـــل :

$B_0$ : قانون الانغلاق متحقق، حيث أنه لأى $a , b \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus b \in X_{30} \quad , \quad a \otimes b \in X_{30}$$

$B_1$ : قانون الإبدال متحقق، حيث أنه لأى $a , b \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus b = LCM(a , b) = LCM(b , a) = b \oplus a$$

$$a \otimes b = GCD(a , b) = GCD(b , a) = b \otimes a$$

$B_2$ : قانون التجميع متحقق، حيث أنه لأى $a , b , c \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \quad ,$$

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

$B_3$ : قانون التوزيع متحقق ، حيث أنه لأى $a , b , c \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$B_4$ : قانون الوحدة متحقق ، حيث أنه لأى $a \in X_{30}$ فإن

$$a \oplus 1 = LCM(a , 1) = a \quad , \quad a \otimes 30 = GCD(a , 30) = a$$

أذن العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع $\oplus$ هو العدد 1 والعنصر المحايد بالنســـبة لعملية الضرب $\otimes$ هو العدد 30 (والعددين $1 , 30 \in X_{30}$).

$B_5$ : قانون المكملة متحقق لأنه لكل $a \in X_{30}$ يوجد $a' = \dfrac{30}{a} \in X_{30}$ بحيث أن

$$a \oplus a' = LCM\left(a , \frac{30}{a}\right) = 30 \quad , \quad a \otimes a' = GCD\left(a , \frac{30}{a}\right) = 1$$

أذن النظام $(X_{30} , \oplus , \otimes)$ يكون جبر بوول .

## ٢ – نظريات أساسية

**تعريف٢ : مفهوم الثنائية فى جبر بوول Duality in a Boolean Algebra**

ثنائيـــة أى عبارة فى جبر بوول $( B , + , * )$ هى العبارة الناتجة من تبديـــل عمليتى الجمع + والضرب * كلا مكان الآخر فى العبارة الأصليـــة وتبديـــل عنصرى الوحدة الجمعى O والضربى U كلا مكان الآخر فى العبارة الأصلية.

مثال ٥ : أوجد ثنائية العبارة $( a + U ) * ( b + O ) = b$

الحـــل : بتطبيق مفهوم الثنائية فى جبر بوول فإن ثنائية العبارة المعطاة تكون

$$( a * O ) + ( b * U ) = b$$

نظرية ١: ثنائية أى نظرية فى جبر بوول هى أيضا نظرية فى جبر بوول، بمعنى أن ثنائيـــة أى شرط من شروط جبر بوول هى أيضا شرط من شروط جبر بوول.

نفرض أن $( B , + , * )$ جبر بوول ونفرض أن $a \in B$ ، فيما يأتى نعرض بعض النظريات الأساسية.

نظرية ٢: عناصر الوحدة تكون وحيدة . أى إن

( ١ )– إذا كان $O_1 , O_2$ هى عناصر محايدة لعملية الجمع فإن $O_1 = O_2$

( ٢ )– إذا كان $U_1 , U_2$ هى عناصر محايدة لعملية الضرب فإن $U_1 = U_2$

البرهان :إثبات ( ١ ) : نفرض أن $O_1 , O_2$ هى عناصر محايدة لعملية الجمع

| السبب | العبارة |
|---|---|
| من الفرض ( $O_2$ محايد جمعى ) | $O_1 = O_1 + O_2$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= O_2 + O_1$ |
| من الفرض ( $O_1$ محايد جمعى ) | $= O_2$ |

أذن المحايد الجمعى يكون وحيد .

إثبات ( ٢ ) : نفرض أن $U_1$ , $U_2$ هى عناصر محايدة لعملية الضرب

| | |
|---|---|
| من الفرض ( $U_2$ محايد ضربى ) | $U_1 = U_1 * U_2$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= U_2 * U_1$ |
| من الفرض ( $U_1$ محايد ضربى ) | $= U_2$ |

أذن المحايد الضربى يكون وحيد .

نظرية ٣ : ( قانون التماثل القوى )

(i) – $a + a = a$ (ii) – $a * a = a$

البرهان : إثبات ( i )

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a + a = (a + a) * U$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= (a + a) * (a + a')$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= a + (a * a')$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= a + O$ |
| قانون الوحدة $B_4$ | $= a$ |

إثبات ( ii )

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a * a = (a * a) + O$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= (a * a) + (a * a')$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= a * (a + a')$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= a * U$ |
| قانون الوحدة $B_4$ | $= a$ |

ويمكن إثبات ( ii ) بطريقة أخرى كالآتى : وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية $a + a = a$ تكون $a * a = a$ وحيث أننا أثبتنا فى ( i ) أن $a + a = a$ صواب أذن $a * a = a$ تكون صواب أيضا .

نظرية ٤ :

$(i)- \quad a + U = U$ $\qquad$ $(ii)- \quad a * O = O$

البرهان : إثبات ( i )

$a + U = a + (a + a')$ قانون المكملة $B_5$

$= (a + a) + a'$ قانون التجميع $B_2$

$= a + a'$ قانون التماثل القوى(نظرية (٣))

$= U$ قانون المكملة $B_5$

إثبات ( ii )

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $a + U = U$ تكون $a * O = O$ وحيث أننا أثبتنا فى ( i ) أن العبارة $a + U = U$ صواب أذن العبارة $a * O = O$ تكون صـــواب أيضا .

نظرية ٥ : ( قانون الالتفاف ) $\qquad a'' = a$

البرهان : من قانون المكملة $B_5$ نعلم انه لكل $a \in B$ يوجد $a' \in B$ بحيث أن

$$a + a' = U \quad , \quad a * a' = O$$

وحيث أن $a' \in B$ أذن يوجد $a'' \in B$ بحيث أن

$$a' + a'' = U \quad , \quad a' * a'' = O \qquad (1)$$

والآن لإثبات أن $a'' = a$

$a = a + O$ قانون الوحدة $B_4$

$= a + (a' * a'')$ من المعادلة ( ١ )

$= (a + a') * (a + a'')$ قانون التوزيع $B_3$

$= U * (a + a'')$ قانون المكملة $B_5$

$= (a' + a'') * (a + a'')$ من المعادلة ( ١ )

$= (a'' + a') * (a'' + a)$ قانون الإبدال $B_1$

$= a'' + (a' * a)$ قانون التوزيع $B_3$

| | |
|---|---|
| قانون الإبدال $B_1$ | $= a'' + (a * a')$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= a'' + O$ |
| قانون الوحدة $B_4$ | $= a''$ |

نظرية ٦ : عناصر الوحدة تكون مكملات لبعضها البعض أى إن

(i) $O' = U$

(ii) $U' = O$

البرهان : إثبات (i)

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $O' = O' + O$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= O + O'$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= U$ |

إثبات (ii)

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $O' = U$ تكون $U' = O$ وحيث أننا أثبتنا فى (i) أن العبارة $O' = U$ صواب أذن العبارة $U' = O$ تكون صواب أيضا.

نظرية ٧ : قانون ديمورجان

(i) - $(a + b)' = a' * b'$

(ii) - $(a * b)' = a' + b'$

البرهان : إثبات (i) لإثبات أن $(a + b)' = a' * b'$ نحاول إثبات

$$(a + b) + (a' * b') = U \quad (1)$$

$$(a + b) * (a' * b') = O \quad (2)$$

**أولا : إثبات ( 1 )**

$$(a+b)+(a' * b')$$

| | |
|---|---|
| $= ((a+b)+a')*((a+b)+b')$ | قانون التوزيع $B_3$ |
| $= ((b+a)+a')*((a+b)+b')$ | قانون الإبدال $B_1$ |
| $= (b+(a+a'))*(a+(b+b'))$ | قانون التجميع $B_2$ |
| $= (b+U)*(a+U)$ | قانون المكملة $B_5$ |
| $= U*U$ | من نظرية ( ٤ ) |
| $= U$ | قانون التماثل القوى(نظرية (٣)) |

**ثانيا : إثبات ( 2 )**

$$(a+b)*(a' * b')$$

| | |
|---|---|
| $= (a' * b') * (a+b)$ | قانون الإبدال $B_1$ |
| $= ((a' * b')*a) + ((a' * b')*b)$ | قانون التوزيع $B_3$ |
| $= ((b' * a')*a) + ((a' * b')*b)$ | قانون الإبدال $B_1$ |
| $= (b' *(a' * a)) + (a' *(b' * b))$ | قانون التجميع $B_2$ |
| $= (b' *(a * a')) + (a' *(b * b'))$ | قانون الإبدال $B_1$ |
| $= (b' * O) + (a' * O)$ | قانون المكملة $B_5$ |
| $= O+O$ | من نظرية ( ٤ ) |
| $= O$ | قانون التماثل القوى (نظرية ( ٣ ) |

إثبات ( ii )

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $(a+b)' = a' * b'$ تكون $(a*b)' = a' + b'$

وبالتالى ينتج من ( i ) أن العبارة $(a*b)' = a' + b'$ تكون متحققة أيضا.

نظرية ٨ : المكملة تكون وحيدة.

البرهان : نفرض أن $a'_2$ , $a'_1$ مكملتين للعنصر a. أذن المطلوب إثبات أن $a'_1 = a'_2$

ومن قانون المكملة $B_5$ وحيث أن $a'_2$ , $a'_1$ مكملتين للعنصر a. اذن

$$a + a'_1 = U \quad , \quad a * a'_1 = O \qquad (1)$$

$$a + a'_2 = U \quad , \quad a * a'_2 = O \qquad (2)$$

والآن لإثبات أن $a'_1 = a'_2$

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a'_1 = a'_1 + O$ |
| الفرض فى معادلة ( ٢ ) | $= a'_1 + (a * a'_2)$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= (a'_1 + a) * (a'_1 + a'_2)$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= (a + a'_1) * (a'_1 + a'_2)$ |
| الفرض فى معادلة ( ١ ) | $= U * (a'_1 + a'_2)$ |
| الفرض فى معادلة ( ٢ ) | $= (a + a'_2) * (a'_1 + a'_2)$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= (a'_2 + a) * (a'_2 + a'_1)$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= a'_2 + (a * a'_1)$ |
| الفرض فى معادلة ( ١ ) | $= a'_2 + O$ |
| قانون الوحدة $B_4$ | $= a'_2$ |

نظرية ٩ : ( قانون الامتصاص )

(i) – $a + (a * b) = a$

(ii) – $a * (a + b) = a$

البرهان : إثبات (i)

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a + (a * b) = (a * U) + (a * b)$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= a * (U + b)$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= a * (b + U)$ |
| من نظرية ( ٤ ) | $= a * U$ |
| قانون الوحدة $B_4$ | $= a$ |

**إثبات (ii)**

وفقا لمفهوم الثنائية فإن ثنائية العبارة $a + (a * b) = a$ تكون $a * (a + b) = a$

وبالتالى ينتج من (i) أن العبارة $a * (a + b) = a$ تكون متحققة أيضا.

نظرية ١٠ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بـــوول وان $a, b \in B$ . أذن الشـــروط الآتية متكافئة

(1) $a * b' = O$

(2) $a + b = b$

(3) $a' + b = U$

(4) $a * b = a$

البرهان : الإثبات يتم فى الخطوات الآتية :

(i) – $(1) \Rightarrow (2)$

(ii) – $(2) \Rightarrow (3)$

(iii) – $(3) \Rightarrow (4)$

(iv) – $(4) \Rightarrow (1)$

إثبات (i) $((1) \Rightarrow (2))$

نفرض أن $a * b' = O$

| السبب | العبارة |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a + b = (a+b) * U$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= (a+b) * (b+b')$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= (b+a) * (b+b')$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= b + (a * b')$ |
| من الفرض | $= b + O$ |
| قانون الوحدة $B_4$ | $= b$ |

إثبات ( ii ) $\big( \; (2) \Rightarrow (3) \; \big)$

نفرض أن $a + b = b$

| | |
|---|---|
| من الفرض ( 2 ) | $a' + b = a' + (a + b)$ |
| قانون التجميع $B_2$ | $= (a' + a) + b$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= (a + a') + b$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= U + b$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= b + U$ |
| من نظرية ( ٤ ) | $= U$ |

إثبات ( iii ) $\big( \; (3) \Rightarrow (4) \; \big)$

نفرض أن $a' + b = U$

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a * b = (a * b) + O$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= (a * b) + (a * a')$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= a * (b + a')$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= a * (a' + b)$ |
| من الفرض ( ٣ ) | $= a * U$ |
| قانون الوحدة $B_4$ | $= b$ |

إثبات ( iv ) $\big( \; (4) \Rightarrow (1) \; \big)$

نفرض أن $a * b = a$

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a * b' = (a * b') + O$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= (a * b') + (a * a')$ |
| قانون التوزيع $B_3$ | $= a * (b' + a')$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= a * (a' + b')$ |
| من نظرية ديمورجان | $= a * (a * b)'$ |
| من الفرض ( 4 ) | $= a * a'$ |
| قانون المكملة $B_5$ | $= O$ |

تعريف ٣ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول وان $a, b \in B$ . أذن يطلق على a أنهـا تسبق b ويرمز لذلك بالرمز $a \lesssim b$ إذا كانت إحدى خـواص النظريـة (١٠) متحققة.

مثال ٦ : نفرض جبر بوول $(B, \cup, \cap)$ حيث B عائلة مـن المجموعـات ونفـرض $X, Y \in B$ . أذن X تسبق Y $(X \lesssim Y)$ تعـنى أن $(X \subset Y)$

وبالتالى النظرية (١٠) تنص على انه إذا كانت $X \subset Y$ فإن الشروط الآتيـة تكون متحققة:

(1) $X \cap Y' = \Phi$ (3) $X' \cup Y = U$

(2) $X \cup Y = Y$ (4) $X \cap Y = X$

مثال ٧ : نفرض جبر بوول $(B, \vee, \wedge)$ حيث B مجموعة من الافتراضات ونفـرض $p, q \in B$ أذن p تسبق q $(p \lesssim q)$ تعنى أن $(p \Rightarrow q)$ وبالتـالى النظرية (١٠) تنص على انه إذا كان $p \Rightarrow q$ فإن الشروط الآتية تكون متحققة:

(1) $p \wedge \sim q$ افتراض خاطئ منطقيا ( تناقض )

(2) $p \vee q \equiv q$

(3) $\sim p \vee q$ افتراض صائب منطقيا ( تحصيل حاصل )

(4) $p \text{ I } q \equiv p$

نظرية ١١ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول. العلاقة $\lesssim$ هى علاقة ترتيب جزئـى فى B ، أى إن

(i) $a \lesssim a \quad \forall \; a \in B$ ( $\lesssim$ علاقة عاكسة )

(ii) $(a \lesssim b) \wedge (b \lesssim a) \Rightarrow a = b$ ( $\lesssim$ علاقة غير متماثلة )

(iii) $(a \lesssim b) \wedge (b \lesssim c) \Rightarrow a \lesssim c$ ( $\lesssim$ علاقة ناقلة )

البرهان : نفرض $a , b , c \in B$ .

من التعريف حيث أن $a \lesssim b$ تعنى أن إحدى خواص النظرية ( ١٠ ) متحققــــة.

أذن من الخاصية الثانية بالنظرية ينتج أن

$$a \lesssim b \quad \leftrightarrow \quad a + b = b \qquad (1)$$

$$b \lesssim a \quad \leftrightarrow \quad b + a = a \qquad (2)$$

$$b \lesssim c \quad \leftrightarrow \quad b + c = c \qquad (3)$$

( i ) إثبات $\lesssim$ علاقة عاكسة

من قانون التماثل القوى ( نظرية ( ٣ ) ) نعلم أن $a + a = a$ وباستخدام معادلـــة (1) ينتج أن $a \lesssim a$ . أذن العلاقة $\lesssim$ علاقة عاكسة.

( ii ) إثبات $\lesssim$ علاقة غير متماثلة

نفرض أن $b \lesssim a \quad , \quad a \lesssim b$

| | |
|---|---|
| من تعريف $b \lesssim a$ فى معادلة ( 2 ) | $a = b + a$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= a + b$ |
| من تعريف $a \lesssim b$ فى معادلة ( 2 ) | $= b$ |

أذن ينتج أن $a = b$ وبالتالى $\lesssim$ علاقة غير متماثلة.

( iii ) إثبات $\lesssim$ علاقة ناقلة

نفرض أن $b \lesssim c \quad , \quad a \lesssim b$

| | |
|---|---|
| من تعريف $b \lesssim c$ فى معادلة ( 3 ) | $a + c = a + (b + c)$ |
| قانون التجميع $B_2$ | $= (a + b) + c$ |
| من تعريف $a \lesssim b$ فى معادلة ( 2 ) | $= b + c$ |
| من تعريف $b \lesssim c$ فى معادلة ( 3 ) | $= c$ |

اذن ينتج أن $a + c = c$ وبالتالى $a \lesssim c$ .

أذن $\lesssim$ علاقة ناقلة .

مثال ٨ : أثبت أن ثنائية $a \lesssim b$ تكون $b \lesssim a$ . أى انه فى جبر بوول فإن ثنائيـــة علاقــة تؤدى إلى علاقة عكسية فى الترتيب الجزئى.

الحل : من التعريف حيث أن $a \lesssim b$ تعنى أن إحدى خواص النظرية (١٠) متحققة. أذن من الخاصية الثانية بالنظرية ينتج أن

$$a \lesssim b \quad \leftrightarrow \quad a + b = b$$

أى إن ثنائية $a \lesssim b$ هى نفسها ثنائية $a + b = b$ . وحيث أن ثنائيـــة $a + b = b$ تكون $a * b = b$ ومن قانون الإبدال $B_1$ تصبح $b * a = b$ وهذه تكافئ $b \lesssim a$ من الخاصية الثانية بالنظرية (١٠)، أذن ثنائية $a \lesssim b$ تكون $b \lesssim a$ .

مثال ٩ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول وان $a , b \in B$ . أثبت أن

$$a \lesssim a + b \qquad , \qquad b \lesssim a + b$$

الحل : من الخاصية الثانية بالنظرية (١٠)، لإثبات أن $a \lesssim a + b$ نحاول إثبات أن

$$a + (a + b) = a + b$$

$a + (a + b) = (a + a) + b$ قانون التجميع $B_2$

$= a + b$ قانون التماثل القوى ( نظرية (٣) )

وبالتالى ينتج المطلوب $a \lesssim a + b$ .

وبالمثل لإثبات أن $b \lesssim a + b$ نحاول إثبات أن

$$b + (a + b) = a + b$$

| | |
|---|---|
| قانون الإبدال $B_1$ | $b + (a + b) = (a + b) + b$ |
| قانون التجميع $B_2$ | $= a + (b + b)$ |
| قانون التماثل القوى ( نظرية ( ٣ ) ) | $= a + b$ |

وبالتالى ينتج المطلوب $b \leq a + b$

مثال ١٠ : نفرض أن $(B, +, *)$ جبر بوول وان $a \in B$ . أثبت أن

$$O \leq a \leq U$$

الحـــل :

| | |
|---|---|
| قانون الوحدة $B_4$ | $a = a + O$ |
| قانون الإبدال $B_1$ | $= O + a$ |

أذن من الخاصية الثانية بالنظرية ( ١٠ ) ينتج أن $O \leq a$

ومن نظريـــــة ( ٤ ) نعلــم أن $a + U = U$ وبالتـــالى ينتـــج أن $a \leq U$ ، أى أن $O \leq a \leq U$ .

# تمارين الفصل السابع

١ – نفرض المجموعة الشاملة $A = \{ a , b , c \}$ والمجموعة $B = p(A)$ مجموعة القوة. أثبت أن النظام $( B , Y , I )$ يكون جبر بوول حيث عمليتى الجمع والضرب هما الاتحاد والتقاطع فى المجموعات .

٢ – نفرض المجموعة $X_{70}$ وهى مجموعة قواسم العدد 70 ونعرف عملية جمع $\oplus$ وعملية ضرب $\otimes$ على المجموعة $X_{70}$ كالآتى:

المضاف المشترك الأصغر للعدديين $a \oplus b = LCM ( a , b )$

القاسم المشترك الأعلى للعدديين $a \otimes b = GCD ( a , b )$

أثبت أن النظام $( X_{70} , \oplus , \otimes )$ يكون جبر بوول ثم أحسب قيمة كل من

1 ) - $2 * ( 5' + 7 )'$

2 ) - $( 35 + 14' ) * ( O' + U )$

3 ) - $( 10 + O )' + ( O' * 70 )'$

٣ – نفرض جبر بوول لقواسم العدد 110 $( X_{110} , \oplus , \otimes )$ حيث عمليتى الجمع $\oplus$ والضرب $\otimes$ معرفة فى تمرين ( ٢ ). أحسب قيمة كل من

1 ) - $22 * ( 11' + 2 )$

2 ) - $( 55 + 10' ) + 2 + U'$

3 ) - $( 10 + O )' + ( O' * 5 )'$

٤ – نفرض جبر بوول $( B , + , * )$ ، حيث $B = \{ 0 , 1 \}$ وعمليتى الجمع والضرب معرفتان بالنسبة إلى B بالجدولين الآتيين

| * | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

أحسب قيمة كل من

1) - $1 * (0+1)'$

2) - $(1+1) * (O' + O)$

3) - $(1' + O)' + (O' * 1)'$

٥ – باستخدام جبر بوول أثبت كل من العبارات الآتية ثم أوجد ثنائية كل منها

(1) - $(b+U) * (a+O) = a$

(2) - $(a+b) * (b+c) = ac + b$

(3) - $a(a' + b) = ab$

(4) - $a + (b * d) = (a+b) * (a+d)$

(5) - $a * (f + c) = (a * f) + (a * c)$

(6) - $(a+b)(a' b') = O$

(7) - $a+b + a' b' = U$

(8) - $(a+b)' = a' b'$

(9) - $a * O + a * U = a$

(10) - $a + a' b = a + b$

٦ – باستخدام جبر بوول أثبت أن $(a * b)' = a' + b'$ .

٧ – نفرض جبر بوول $(B, \cup, \cap)$ حيث B عائلة من المجموعات ونفرض $X, Y \in B$ . العلاقة X تسبق Y $(X \lesssim Y)$ تعنى أن $(X \subset Y)$ .

أثبت انه إذا كانت $X \subset Y$ فإن الشروط الآتية تكون متحققة:

(1) $X \cap Y' = \Phi$

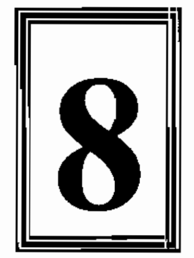
(2) $X \cup Y = Y$

(3) $X' \cup Y = U$

(4) $X \cap Y = X$



الفصل



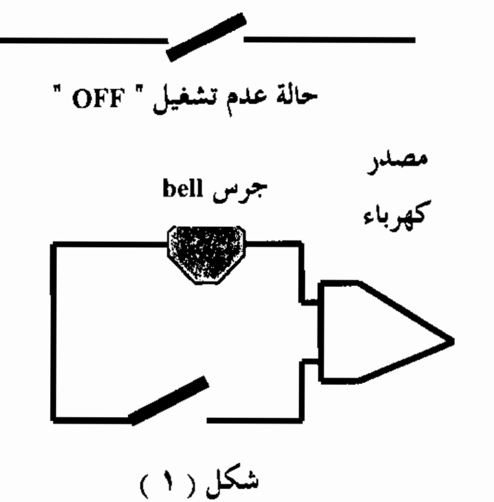
# تصميم دوائر المفاتيح الكهربائية
# Switching Networks Design

## ١ – دوائر المفاتيح الكهربائية Switching Networks

من التطبيقات الخاصة للمنطق الرياضى استخدامه فى تصميم شبكات المفاتيح الكهربية وهى عبارة عن دوائر كهربية مثل الموجودة فى مفاتيح الإضاءة الكهربائية ، وهذه الدوائر الكهربية عبارة عن ترتيب من الأسلاك والمفاتيح الكهربائية ، وكما نعلم فإن المفتاح الكهربائى يستعمل فى توصيل أو فصل الكهرباء عن الدائرة ويكون فى أحد وضعين :

الوضع الأول : المفتاح الكهربائى فى حالة تشغيل " ON " أى يمر التيار الكهربائى بالدائرة.

الوضع الثانى : المفتاح الكهربائى فى حالة عدم تشغيل " OFF " أى لا يمر التيار الكهربائى بالدائرة.




حالة تشغيل " ON "

شكل ( ١ )

ومن أمثلة هذه الدوائر الكهربائية دائرة الجرس الكهربائى الموضحة بشكل (١)، فعند الضغط على مفتاح الجرس فإن المفتاح يصبح فى حالة تشغيل ON أى يمر التيار الكهربائى بالدائرة وفى هذه

الحالة يدق الجرس بينما فى الوضع العادى فإن مفتاح الجرس لا يكون مضغوط وبالتالى يكون المفتاح الكهربائى فى حالة عدم تشغيل OFF أى لا يمر التيار الكهربائى بالدائرة وفى هذه الحالة لا يدق الجرس.

وبعض الدوائر الكهربائية تحتوى على اكثر من مفتاح كهربائى ، وبفرض أن دائرة تحتوى على مفتاحين نرمز لهما $q$ , $p$ فإنه يوجد طريقتان لتوصيل المفتاحين بالدائرة :

## الطريقة الأولى : التوصيل على التوالى

شكل ( ٢ ) يوضح توصيل المفتاحين $p , q$ على التوالى وفى هذه الحالة فإن التيار الكهربى يمر بالدائرة عندما يكون كل من المفتاحين $p$ , $q$ فى حالة تشغيل ON أما إذا كان أحد المفتاحين أو كليهما فى حالة عدم تشغيل OFF فإن التيار الكهربى لن يمر بالدائرة.

p q

شكل ( ٢ )

والسؤال الآن

**"هل عمل المفتاحين فى حالة توصيلهما على التوالى يذكرك بأى شئ فيما درسته بالمنطق؟"**

نلاحظ أن توصيل المفتاحين $p$ , $q$ على التوالى يشبه الوصلة $p \wedge q$ وكما نعلم فإن الوصلة $p \wedge q$ تكون صواب فقط عندما يكون كل من $p , q$ صواب وخلاف ذلك يكون خطأ وبالمثل عند توصيل المفتاحين $p$ , $q$ على التوالى فإن التيار الكهربى يمر بالدائرة فقط إذا كان كل من المفتاحين $p , q$ فى حالة تشغيل ON وخلاف ذلك لا يمر التيار الكهربى بالدائرة، ويمكن تلخيص سلوك الدائرة الكهربائية فى هذه الحالة بالجدول الأتى:

| p | q | سلوك الدائرة |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

حيث

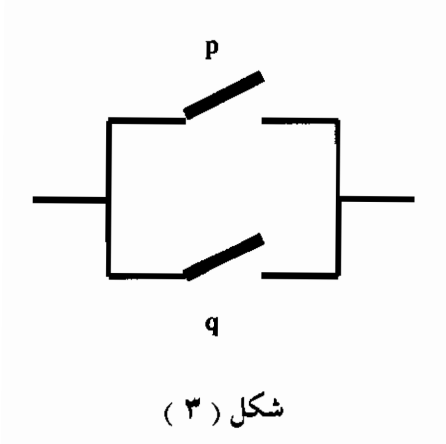
T تعنى أن المفتاح الكهربائى فى حالة تشغيل ON أى أن التيار الكهربى يمر بالدائرة

F تعنى أن المفتاح الكهربائى فى حالة عدم تشغيل OFF أى أن التيار الكهربى لا يمر بالدائرة.

ونلاحظ من الجدول أن سلوك الدائرة الكهربائية فى حالة توصيل المفتاحين $p, q$ على التوالى ينطبق تماما مع جدول الحقيقة للتقرير $p \wedge q$ .

## الطريقة الثانية : التوصيل على التوازى

شكل (٣) يوضح توصيل المفتاحين $p, q$ على التوازى وفى هذه الحالة فإن التيار الكهربى يمر بالدائرة عندما يكون أحد المفتاحين $p, q$ أو كليهما فى حالة تشغيل ON والحالة الوحيدة التى لا يمر فيها التيار الكهربى بالدائرة هى عندما يكون كل من المفتاحين $p, q$ فى حالة عدم تشغيل OFF .



شكل ( ٣ )

والآن نكرر السؤال

"هل عمل المفتاحين فى حالة توصيلهما على التوازى يذكرك بأى شئ فيما درسته بالمنطق؟"

نلاحظ أن توصيل المفتاحين $p$ , $q$ على التوازى يشبه الفاصلة $p \vee q$ وكما نعلم فإن الفاصلة $p \vee q$ تكون صواب عندما يكون أحد التقريران $p$ , $q$ أو كليهما صواب والحالة الوحيدة التى يكون فيها الفاصلة $p \vee q$ خطأ هى عندما يكون كل من التقريران $p$ , $q$ خطأ وبالمثل عند توصيل المفتاحين $p$ , $q$ على التوازى فإن التيار الكهربى يمر بالدائرة عندما يكون أحد المفتاحين $p$ , $q$ أو كليهما فى حالة تشغيل ON والحالة الوحيدة التى لا يمر فيها التيار الكهربى بالدائرة هى عندما يكون كل من المفتاحين $p$ , $q$ فى حالة عدم تشغيل OFF، ويمكن تلخيص سلوك الدائرة الكهربائية فى هذه الحالة بالجدول الآتى:

| p | q | سلوك الدائرة |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

ونلاحظ من الجدول أن سلوك الدائرة الكهربائية فى حالة توصيل المفتاحين $p$ , $q$ على التوازى ينطبق تماما مع جدول الحقيقة للتقرير $p \vee q$ . وبعض الدوائر الكهربائية تحتوى على مفاتيح يتحدد وضعها (وضع تشغيل ON أو وضع عدم تشغيل OFF ) عن طريق مفتاح آخر، بمعنى أن الدائرة قد تحتوى على مفتاحين بحيث إذا كان أحدهما فى وضع التشغيل ON فإن المفتاح الآخر يكون فى الوضع المضاد أى فى وضع عدم التشغيل OFF والعكس صحيح.

تعريف ١ : المفاتيح المتتامة Complementary Switches

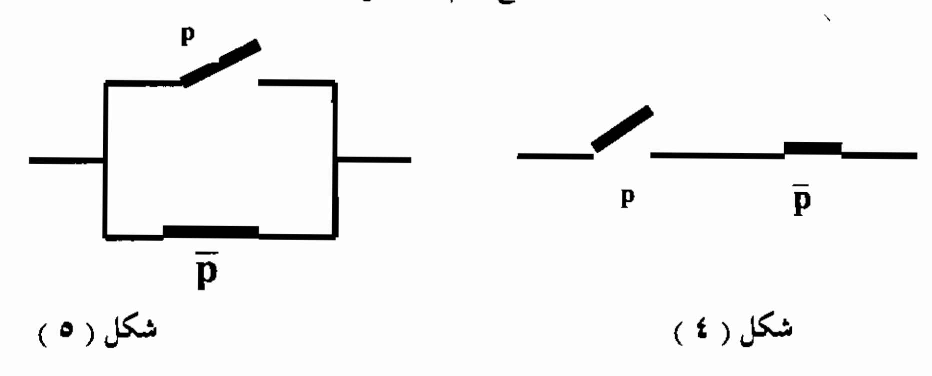
المفتاحان اللذان لهما دائما أوضاع متضادة يسميان مفتاحان متتامان.

وإذا كان لدينا مفتاحان متتامان ورمزنا للمفتاح الأول بالرمز p فسوف نرمز للمفتاح المتمم له بالرمز $\overline{p}$ وهذا يعنى انه

إذا كان المفتاح p فى وضع التشغيل فإن المفتاح المتمم $\overline{p}$ يكون فى وضع عدم التشغيل

وإذا كان المفتاح p فى وضع عدم التشغيل فإن المفتاح المتمم $\overline{p}$ يكون فى وضع التشغيل

اى إن أحد المفتاحان المتتامان دائما فى وضع عدم التشغيل OFF .




شكل ( ٥ )

شكل ( ٤ )

وفى شكل ( ٤ ) يوجد مفتاحان متتامان $\overline{p}$ , p موصلان على التوالى حيث نلاحظ أن التيار الكهربائى لن يمر مطلقا فى هذه الدائرة لان أحد المفتاحان الموصلان على التوالى دائما فى وضع عدم التشغيل OFF بينما فى شكل ( ٥ ) يوجد مفتاحان متتامان $\overline{p}$ , p موصلان على التوازى حيث نلاحظ أن التيار الكهربائى سوف يمر دائما فى هذه الدائرة لان أحد المفتاحان الموصلان على التوازى دائما فى وضع التشغيل O N.

ومرة أخرى نلاحظ التشابه القوى بين المفاتيح المتتامة وبين التقرير ونفيه فى المنطق ، وكما نعلم فإن التقرير ونفيه دائما لهما قيم حقيقة متضادة وهذا ما يتحقق أيضا على المفاتيح المتتامة، أى أن $\overline{p}$ فى لغة المنطق يمثل p ~ . وفى تعاملنا مع رسم المفاتيح بالدوائر الكهربائية سوف نستخدم النموذج الموضح بالشكل ( ٦ ) ليمثل مفتاح كهربائى p غير معلوم ما إذا كان فى وضع التشغيل ON أو وضع عدم التشغيل OFF.

———— p ————

شكل ( ٦ )

وشكل ( ٧ ) يوضح مفتاحان متتامان $\overline{p}$ , $p$ موصلان على التوالى

$p$ $\overline{p}$

شكل ( ٧ )

والتيار الكهربائى لن يمر خلال هذه الدائرة والسبب هو انه

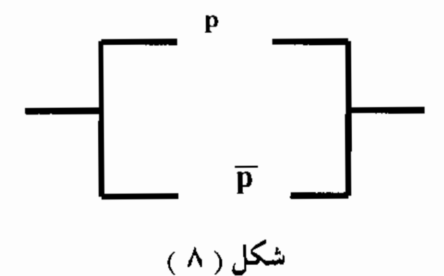
"إذا كان المفتاح $p$ فى وضع التشغيل فإن المفتاح المتمم $\overline{p}$ يكون فى وضع عدم التشغيل

وإذا كان المفتاح المتمم $\overline{p}$ فى وضع التشغيل فإن المفتاح $p$ يكون فى وضع عدم التشغيل."

والجدول الآتى يوضح سلوك هذه الدائرة والذى يتفق مع الوصلة $p \wedge \overline{p}$ ونلاحظ من الجدول أن التقرير $p \wedge \overline{p}$ يكون خاطئ منطقيـــا، أى إن الدائرة لن يمر بها تيار كهربائى على الإطلاق.

| $p$ | $\overline{p}$ | $p \wedge \overline{p}$ |
|---|---|---|
| T | F | F |
| F | T | F |

وشكل ( ٨ ) يوضح مفتاحان متتامان $\overline{p}$ , $p$ موصلان على التوازى




شكل ( ٨ )

والتيار الكهربائى سوف يمر دائما خلال هذه الدائرة والسبب هو انه

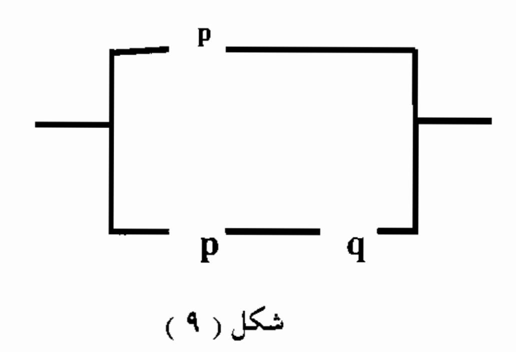
"إذا كان المفتاح $p$ فى وضع عدم تشغيل فإن المفتاح المتمم $\overline{p}$ يكون فى وضع التشغيل

وإذا كان المفتاح المتمم $\overline{p}$ فى وضع عدم تشغيل فإن المفتاح $p$ يكون فى وضع التشغيل."

والجدول الآتى يوضح سلوك هذه الدائرة والذى يتفق مع الفاصلة $p \vee \bar{p}$ ونلاحظ من الجدول أن التقرير $p \vee \bar{p}$ يكون صائب منطقيـا أى إن الدائرة يمر بها تيار كهربائى دائما.

| $p$ | $\bar{p}$ | $p \vee \bar{p}$ |
|---|---|---|
| T | F | T |
| F | T | T |

وبعض الدوائر الكهربائية تكون اكثر تعقيدا حيث تحتوى على مفاتيح يتم توصيلها لتعمل معـا فى نفس الوضع (وضع تشغيل O N أو وضع عدم تشغيل OFF ) بمعنى أن الدائرة قد تحتوى على مفتاحين بحيث إذا كان أحدهما فى وضع التشغيل ON فإن المفتاح الآخر يكون فى نفـس وضع التشغيل ON وإذا كان أحدهما فى وضع عدم التشغيل OFF فإن المفتاح الآخر يكـون فى نفس وضع عدم التشغيل OFF وسوف نستخدم نفس الرمز لتمثيل مثل هذه المفاتيح الـتى تعمل معا فى نفس الوضع. وشكل (٩) يوضح دائرة كهربائية تحتوى على مفتاحين مـن هـذا النوع حيث رمزنا لكل منهم بالرمز p .




شكل ( ٩ )

وفى بداية دراستنا للمنطق تعرفنا على التقارير البسيطة واستخدمنا أدوات الربـط فى تكويـن تقارير مركبة من التقارير البسيطة وتعرفنا على جداول الحقيقة لهذه التقارير المركبة، والآن نحن بصدد تطبيق مفاهيم المنطق على الدوائر الكهربائية، فالمفاتيح الكهربائية تعادل التقارير البسيطة ودوائر المفاتيح الكهربائية تعادل التقارير المركبة، والشكل ( ٩ ) يوضح دائرة توصيل علـى التوازى تتكون من:

١ - السلك العلوى يحتوى على المفتاح $p$ .

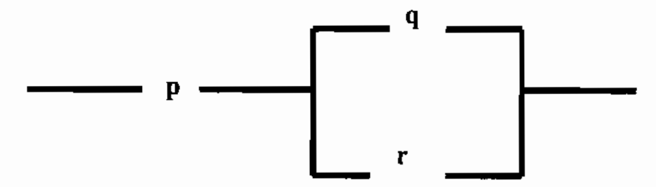
٢ - السلك السفلى يحتوى على مفتاحان $p$ , $q$ موصلان على التوالى وبلغة المنطق يمكن التعبير عنهم بالصورة $p \wedge q$ .

أذن بلغة المنطق يمكن تمثيل هذه الدائرة بالصورة

$$p \vee (p \wedge q)$$

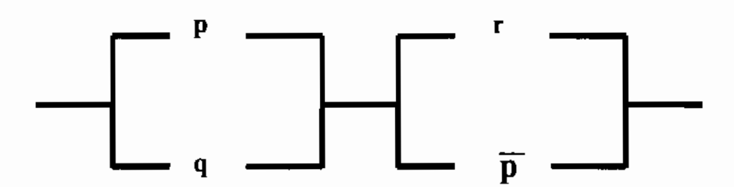
وفى الأمثلة القادمة نقوم بترجمة بعض دوائر المفاتيح الكهربائية إلى لغة المنطق .

مثال ١ : اكتب بلغة المنطق ما تعنيه الدائرة الآتية:



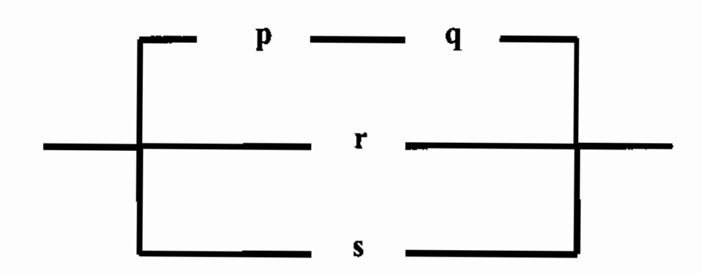

الحل : المفتاحان $q$ , $r$ موصلان على التوازى وبلغة المنطق يمكن تمثيلهم بالصورة $q \vee r$ والمفتاح $p$ موصل على التوالى مع باقى الدائرة ، أذن بلغة المنطق فإن الدائرة المعطاة يمكن تمثيلها بالصورة $p \wedge (q \vee r)$ .

مثال ٢ : اكتب بلغة المنطق ما تعنيه الدائرة الآتية:




الحل : الدائرة تحتوى على مجموعتين متصلتين على التوالى وكل مجموعة تحتوى على مفتاحين متصلين على التوازى، أذن بلغة المنطق فإن الدائرة المعطاة يمكن تمثيلها بالصورة $(p \vee q) \wedge (r \vee \sim p)$ حيث $\sim p$ تعنى المفتاح المتمم $\overline{p}$ .

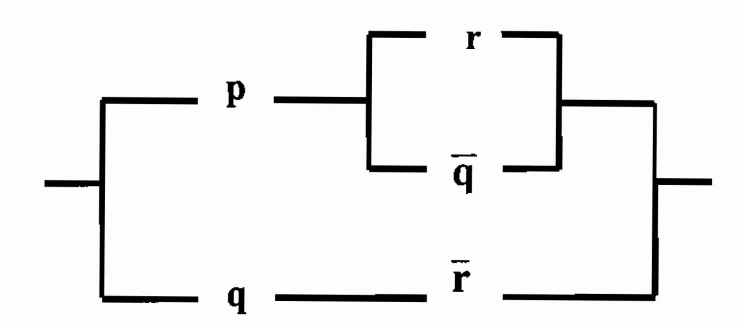
مثال ٣ : اكتب بلغة المنطق ما تعنيه الدائرة الآتية :




الحل : الدائرة تحتوى على ثلاث مجموعات متصلة على التوازى

الدائرة بلغة المنطق $(p \wedge q) \vee r \vee s$

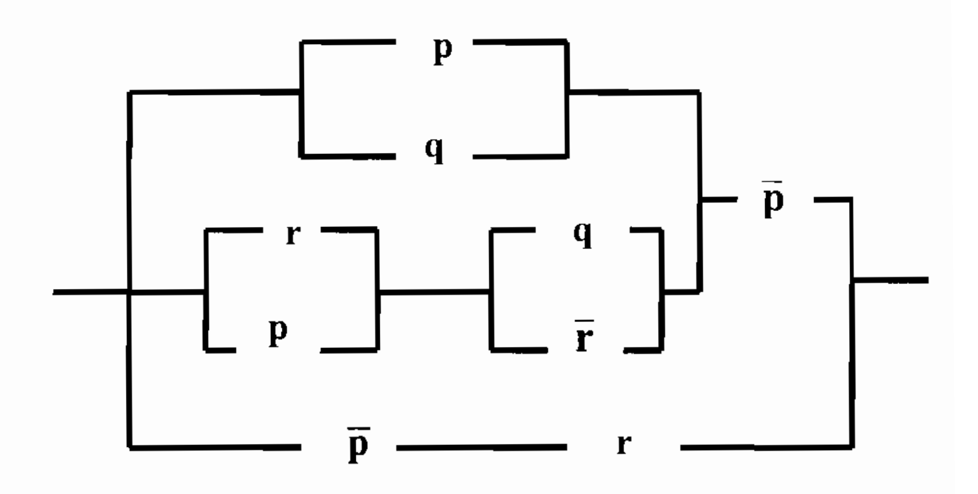
مثال ٤ : اكتب بلغة المنطق ما تعنيه الدائرة الآتية :




الحل : الدائرة بلغة المنطق

$$(p \wedge (r \vee \sim q)) \vee (q \wedge \sim r)$$

مثال ٥ : اكتب بلغة المنطق ما تعنيه الدائرة الآتية :




الحل : الدائرة بلغة المنطق

$$\Big(\big((p \vee q) \vee ((r \vee p) \wedge (q \vee \sim r))\big) \wedge \sim p\Big) \vee (\sim p \wedge r)$$

فى الأمثلة السابقة تعاملنا مع دوائر من المفاتيح الكهربائية وتم التعبير عن كل منها بلغة المنطق، وفى الأمثلة القادمة سوف نقوم بالعملية العكسية وهى رسم دوائر المفاتيح المناظرة لتقارير مكتوبة بلغة المنطق حيث الوصلة $\wedge$ تعنى توصيل على التوالى والفاصلة $\vee$ تعنى توصيل على التوازى والتقرير المنفى $\sim p$ يعنى أن الدائرة الكهربائية تحتوى على مفتاح متمم للمفتاح $p$ ويرمز له $\bar{p}$ .

مثال ٦ : ارسم دائرة مفاتيح كهربائية لتمثيل التقرير

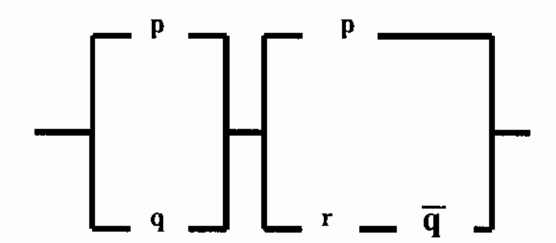
$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \sim p)$$

الحل :

التقرير المعطى من نوع الفاصلة. أذن رسم الدائرة المطلوبة يكون على التوازى وكل سلك يحتوى على مفتاحين موصلين على التوالى .

مثال ٧ : ارسم دائرة مفاتيح كهربائية لتمثيل التقرير

$$(p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge \sim q))$$




الحل :

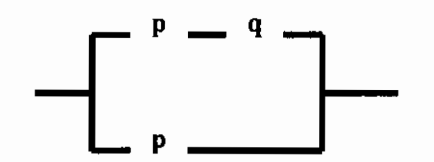
الأقواس بالتقرير المعطى توضح أن التقرير من نوع الوصلة أى توصيل على التوالى لمجموعتين.
المجموعة الأولى $p \vee q$ وهى توصيل على التوازى والمجموعة الثانية $p \vee (r \wedge \sim q)$ وهى توصيل على التوازى بداخله توصيل على التوالى $r \wedge \sim q$ .

**يمكن استخدام قوانين المنطق فى تبسيط دوائر المفاتيح الكهربائية وهذا يمثل فائدة كبيرة ، فإنقاص عدد المفاتيح داخل الدائرة الكهربائية يعنى من الناحية العملية توفير الوقت والجهد والأموال ، ويتم تبسيط الدوائر عن طريق مفهوم الدوائر المتكافئة والذى يشابه تماما مفهوم التقارير المتكافئة .**

**تعريف ٢ : يقال عن دوائر مفاتيح كهربائية أنها دوائر متكافئة إذا كانت تؤدى نفس العمل.**

وبفرض أن لدينا دائرتان متكافئتان فهذا يعنى انه إذا مر التيار الكهربائى خلال الدائـــرة الأولى فإنه يمر خلال الدائرة الثانية وإذا لم يمر التيار الكهربائى خلال الدائرة الأولى فإنه لن يمر خـــلال الدائرة الثانية .

**مثال ٨ : نفرض الدائرة الموضحة بالشكل**




وبلغة المنطق يمكن تمثيل هذه الدائرة على صورة التقرير $(p \wedge q) \vee p$ ، وبتكويـــن جدول الحقيقة

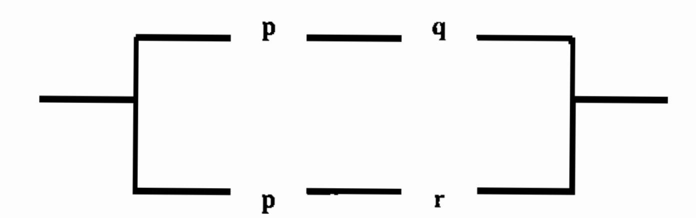
| p | q | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \vee p$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | F | F |
| F | F | F | F |

نلاحظ من الجدول أن التقرير $(p \wedge q) \vee p$ يكافئ التقرير p ، ومن الصـــف الأول والثانى بالجدول نلاحظ أن التيار يمر بالدائرة إذا كان المفتاح p فى وضع التشغيل ON ومن الصف الثالث والرابع نلاحظ أن التيار لا يمر بالدائرة إذا كان المفتـــاح p فى وضـــع عـــدم التشغيل OFF. أذن الدائرة المعطاة تكافئ الدائرة المبسطة الآتية :

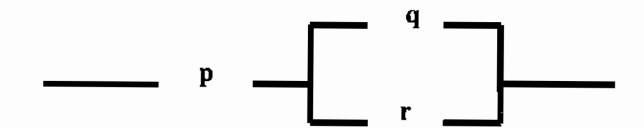
$$\text{———————} \quad p \quad \text{———————}$$

أى أننا استطعنا باستخدام مفهوم التكافؤ المنطقى أن نبسط الدائرة المعطاة من دائرة تحتوى على ثلاثة مفاتيح إلى دائرة تحتوى على مفتاح واحد فقط وبالطبع هذا يؤدى إلى خفض التكلفة عند تصميم الدائرة .

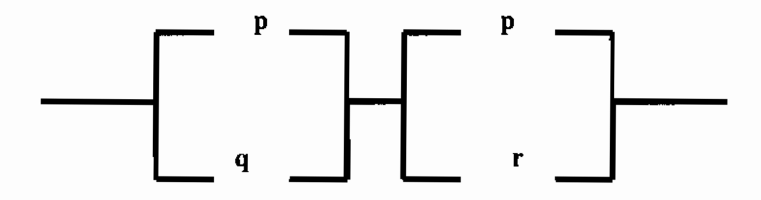
مثال ٩ : أوجد وارسم دائرة مبسطة تكافئ الدائرة الآتية :




الحل : الدائرة المعطاة يمكن التعبير عنها بلغة المنطق فى الصورة $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
وباستخدام قوانين المنطق نعلم من قانون التوزيع أن
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$ أذن الدائرة المعطاة تكافئ الدائرة الآتية




مثال ١٠ : أعطيت دائرة المفاتيح الكهربائية الآتية



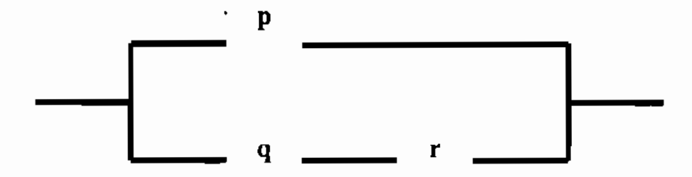

باستخدام قوانين المنطق أوجد وارسم دائرة مبسطة تكافئ الدائرة المعطاة .

الحل :

الدائرة المعطاة يمكن التعبير عنها بلغة المنطق فى الصورة
$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ وباستخدام قوانين المنطق نعلم من قانون التوزيع أن

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$$

أذن الدائرة المعطاة تكافئ الدائرة الآتية




## ٢ - مشكلة ضؤ القاعة Hall Light Problem

سوف نناقش الآن أحد المشاكل التقليدية فى شبكات المفاتيح الكهربية وتسمى مشكلة ضؤ القاعة وتتمثل فى كيفية التحكم فى ضوء القاعة عن طريق مفتاحين، أحدهم فى بداية القاعة والثانى فى نهايتها. أى أننا نريد أن نتحكم بتشغيل أو عدم تشغيل مصباح القاعة من أيا من المفتاحين، وبمعنى آخر أننا نريد تغيير وضع الدائرة الكهربائية سواء من وضع التشغيل ON إلى وضع عدم تشغيل OFF أو من وضع عدم تشغيل OFF إلى وضع تشغيل ON بمجرد الضغط على أيا من المفتاحين، وبفرض أن المفتاحين هما p , q فإن الاحتمالات الممكنة للمفتاحين تكون

| الاحتمالات الممكنة | p | q |
|---|---|---|
| الاحتمال الأول | T | T |
| الاحتمال الثانى | T | F |
| الاحتمال الثالث | F | T |
| الاحتمال الرابع | F | F |

فى الاحتمال الأول كل من المفتاحين p , q يكون فى وضع التشغيل ON ولكن عند تغيير وضع المفتاح q أو المفتاح p فإننا نحصل على الاحتمال الثانى أو الاحتمال الثالث على الترتيب وفى الاحتمال الرابع المفتاحين p , q يكونا فى وضع عدم تشغيل OFF.

وفى الحقيقة لدينا الآن مجموعتين من التركيبات:

## المجموعة الأولى

تشتمل على الاحتمال الأول والاحتمال الرابع وفيها يكون المفتاحين $p$ , $q$ فى نفس الوضع سواء وضع تشغيل كما فى الاحتمال الأول أو وضع عدم تشغيل كما فى الاحتمال الرابع.

## المجموعة الثانية

تشتمل على الاحتمال الثانى والاحتمال الثالث وفيها يكون المفتاحين فى وضعين مختلفين أى أنه إذا كان المفتاح $p$ فى وضع التشغيل فإن المفتاح $q$ يكون فى وضع عدم التشغيل وإذا كان المفتاح $p$ فى وضع عدم تشغيل فإن المفتاح $q$ يكون فى وضع تشغيل.

ويمكن بطريقتين مختلفتين تصميم دائرة مفاتيح للتحكم فى تشغيل أو عدم تشغيل مصباح القاعة من أيا من المفتاحين.

## الطريقة الأولى

تعتمد على تصميم الدائرة بحيث تحقق :

١ – يمر التيار فى الدائرة إذا كان المفتاحين $p$ , $q$ فى نفس الوضع سواء وضع تشغيل كما فى الاحتمال الأول أو وضع عدم تشغيل كما فى الاحتمال الرابع.

٢ – لا يمر التيار فى الدائرة إذا كان المفتاحين $p$ , $q$ فى وضعين مختلفين كما فى الاحتمال الثانى والثالث.

وحيث انه عندما يكون كل من المفتاحين $p$ , $q$ فى وضع التشغيل ON فإن التقرير $p \wedge q$ يكون صواب وعندما يكون كل من المفتاحين $p, q$ فى وضع عدم التشغيل OFF فإن التقرير $\sim p \wedge \sim q$ يكون صواب، وكذلك عندما يكون المفتاحين $p$ , $q$ فى وضعين مختلفين فإن التقرير $p \wedge q$ يكون خطأ وكذلك

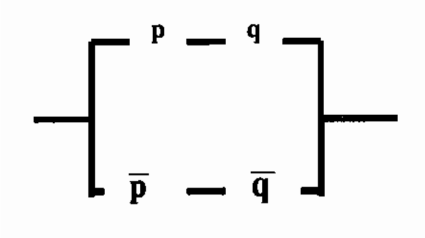
التقرير $\sim p \wedge \sim q$ يكون خطأ أيضا. أذن بلغة المنطق فإن التقرير الذى يصف دائرة ضوء القاعة فى هذه الحالة يكون من نوع الفاصلة وفى الصورة

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

| p | q | ~ p | ~ q | p ∧ q | ~p∧~q | (p∧q)∨(~p∧~q) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | F | T |
| T | F | F | T | F | F | F |
| F | T | T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | F | T | T |

ونلاحظ من جدول الحقيقة أن التقرير $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ يكون صواب فى حالة $p$ , $q$ صواب معا أو خطأ معا، أى عندما يكون $p$ , $q$ من نفس النوع، كما نلاحظ أن التقرير يكون خطأ فى حالة $p$ , $q$ مختلفين.

وبالتالى فإن دائرة المفاتيح الكهربائية التى تفى بالمطلوب فى مشكلة ضوء القاعة نحصل عليها برسم الدائرة التى تمثل التقرير $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ .




ونلاحظ من الدائرة أنها موصلة على التوازى

- السلك العلوى يحتوى على المفتاحين $p$ , $q$ وموصلين على التوالى.
- السلك السفلى يحتوى على المفتاحين المتممين $\bar{p}$ , $\bar{q}$ وموصلين على التوالى .

وعندما يكون المفتاحين $p$ , $q$ فى وضع التشغيل ON فإن التيار الكهربائى يمر بالدائرة عن طريق السلك العلوى وكذلك عندما يكون المفتاحين $p$ , $q$ فى وضع عدم التشغيل OFF فإن المفتاحين المتممين $\bar{q}$ , $\bar{p}$ يكونا فى وضع التشغيل ON وبالتالى يمر التيار الكهربائى بالدائرة عن طريق السلك السفلى، ولكن بمجرد الضغط على أحد المفتاحين ليصبح المفتاحين

$p$ , $q$ فى وضعين مختلفين فإن التيار الكهربائى لن يمر سواء بالسلك العلوى أو بالسلك السفلى وبالتالى التيار الكهربائى لن يمر بالدائرة .

## الطريقة الثانية

تعتمد على تصميم الدائرة بحيث تحقق :

١ - يمر التيار فى الدائرة إذا كان المفتاحين $p$ , $q$ فى وضعين مختلفين كما فى الاحتمال الثانى والاحتمال الثالث .

٢ - لا يمر التيار فى الدائرة إذا كان المفتاحين $p$ , $q$ فى نفس الوضع سواء وضع تشغيل كما فى الاحتمال الأول أو وضع عدم تشغيل كما فى الاحتمال الرابع .

وحيث انه عندما يكون كل من المفتاحين $p$ , $q$ فى وضعين مختلفين فإن التقرير $p \vee q$ يكون صواب وبالتالى التقرير $\sim p \vee \sim q$ يكون صواب أيضا، وكذلك عندما يكون المفتاحين $p , q$ فى نفس الوضع فإن التقريران $p \vee q$ , $\sim p \vee \sim q$ يكون أحدهم صواب والآخر خطأ. أذن بلغة المنطق فإن التقرير الذى يصف دائرة ضوء القاعة فى هذه الحالة يكون من نوع الوصلة وفى الصورة

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \vee q$ | $\sim p \vee \sim q$ | $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T | F | F |
| T | F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | F | T | T | T |
| F | F | T | T | F | T | F |

ونلاحظ من جدول الحقيقة أن التقرير $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ يكون صواب فى حالة $p$ , $q$ مختلفين فى النوع، كما نلاحظ ان التقرير يكون خطأ فى حالة $p$ , $q$ صواب معا او خطأ معا، أى عندما يكون $p$ , $q$ من نفس النوع

وبالتالى فإن دائرة المفاتيح الكهربائية التى تفى بالمطلوب فى مشكلة ضوء القاعة نحصل عليها برسم الدائرة التى تمثل التقرير

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

ونلاحظ من الدائرة أنها موصلة على التوالى من فرعين

- الفرع الأول يحتوى على المفتاحين $p$ , $q$ موصلين على التوازى.
- الفرع الثانى يحتوى على المفتاحين المتممين $\bar{q}$ , $\bar{p}$ موصلين على التوازى.

وعندما يكون المفتاحين $p , q$ فى وضع التشغيل ON فإن المفتاحين المتممين $\bar{q}$ , $\bar{p}$ يكونا فى وضع عدم التشغيل OFF ونتيجة لذلك فإن التيار الكهربائى يمر بالفرع الأول ولكنه لن يمر بالفرع الثانى وبالتالى التيار الكهربائى لن يمر بالدائرة، ولكن بمجرد الضغط على أحد المفتاحين ليصبح المفتاحين $p$ , $q$ فى وضعين مختلفين فإن المفتاحين المتممين $\bar{q}$ , $\bar{p}$ يكونا فى وضعين مختلفين أيضا ونتيجة لذلك فإن التيار الكهربائى سوف يمر بالفرع الأول وكذلك يمر بالفرع الثانى وبالتالى التيار الكهربائى يمر بالدائرة. وباستخدام تكافؤ التقارير نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}
&(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
&\quad \equiv ((p \vee q) \wedge \sim p) \vee ((p \vee q) \wedge \sim q) \\
&\quad \equiv (\sim p \wedge (p \vee q)) \vee (\sim q \wedge (p \vee q)) \\
&\quad \equiv ((\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)) \vee ((\sim q \wedge p) \vee (\sim q \wedge q)) \\
&\quad \equiv (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p) \\
&\quad \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)
\end{aligned}$$

أذن التقرير الذى يصف دائرة ضوء القاعة فى هذه الحالة يكون من نوع الفاصلة وفى الصورة

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

| p | q | ~ p | ~ q | p ∧ ~ q | ~ p ∧ q | ( p ∧ ~ q ) ∨ ( ~ p ∧ q ) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F | F | F |
| T | F | F | T | T | F | T |
| F | T | T | F | F | T | T |
| F | F | T | T | F | F | F |

وبالتالى فإن دائرة المفاتيح الكهربائية التى تفى بالمطلوب فى مشكلة ضوء القاعة نحصل عليها برسم الدائرة التى تمثل التقرير

$$( p \wedge \sim q ) \vee ( \sim p \wedge q )$$

p — $\overline{q}$

$\overline{p}$ — q

ونلاحظ من الدائرة أنها موصلة على التوازى

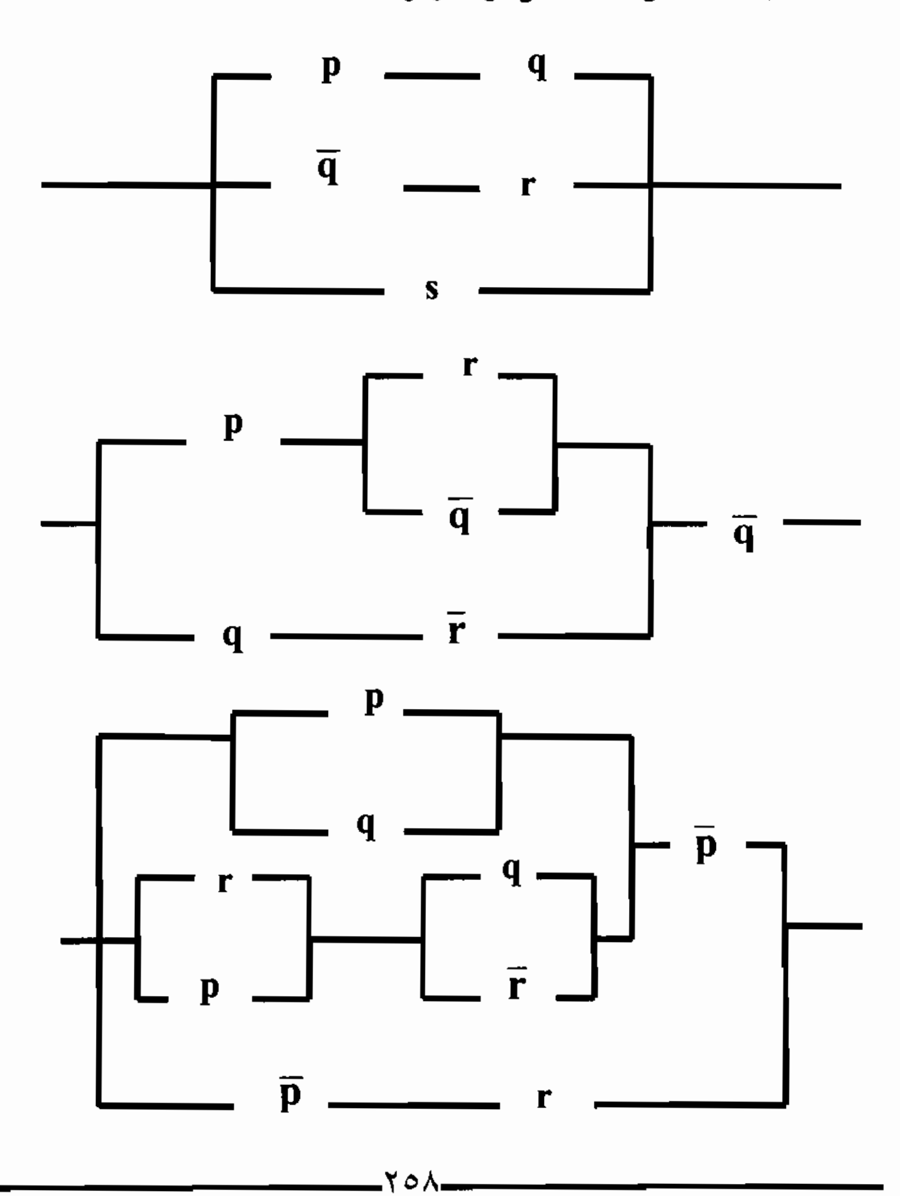
- السلك العلوى يحتوى على المفتاحين $\overline{q}$ , p موصلين على التوالى .
- السلك السفلى يحتوى على المفتاحين q , $\overline{p}$ موصلين على التوالى .

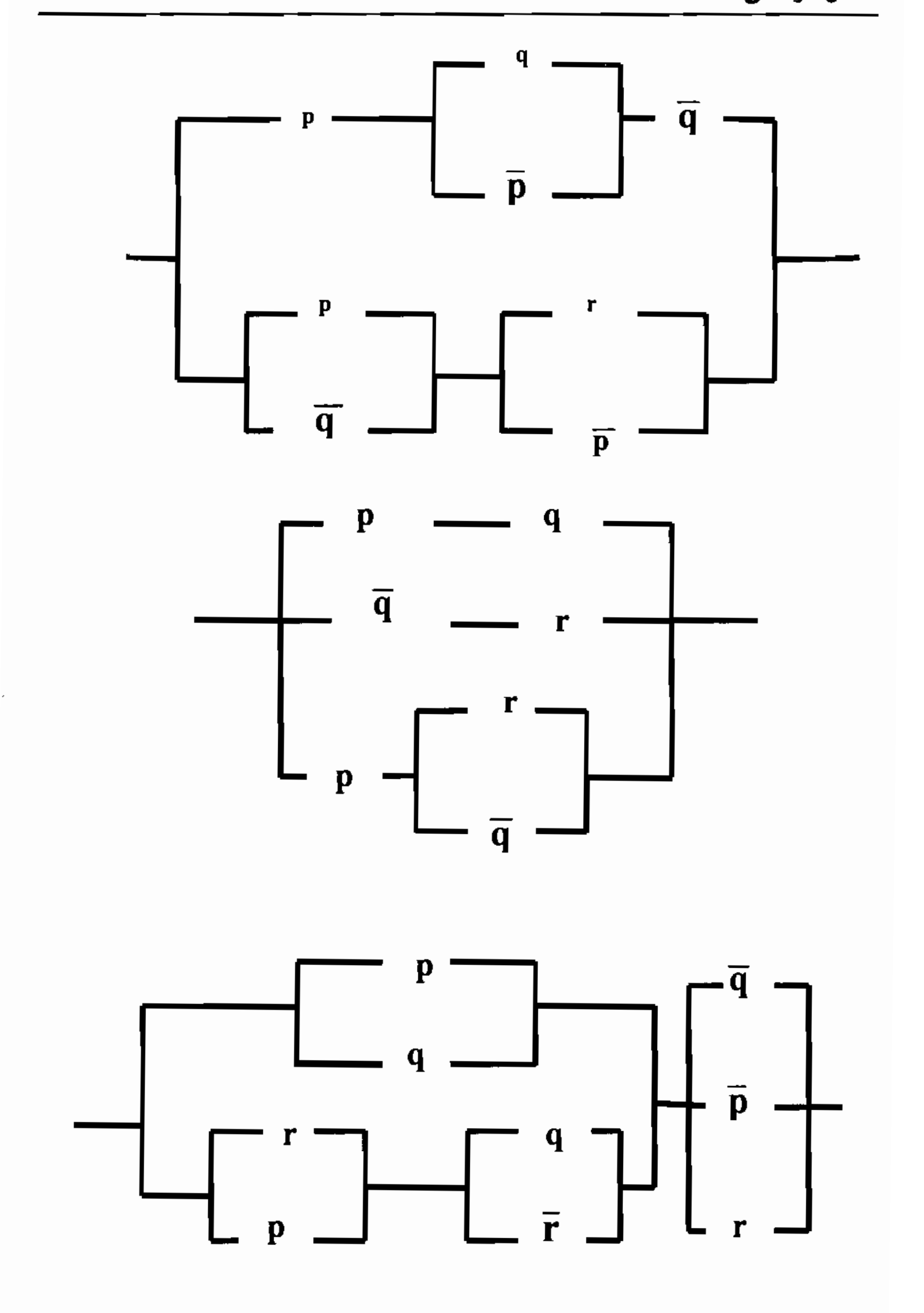
وعندما يكون المفتاحين p , q فى وضع التشغيل ON فإن المفتاحين المتممين $\overline{q}$ , $\overline{p}$ يكونا فى وضع عدم التشغيل OFF ونتيجة لذلك فإن التيار الكهربائى لن يمر بالسلك العلوى وكذلك لن يمر بالسلك السفلى، وبالتالى التيار الكهربائى لن يمر بالدائرة، ولكن بمجرد الضغط على أحد المفتاحين ليصبح المفتاحين p , q فى وضعين مختلفين فإن المفتاحين المتممين $\overline{q}$ , $\overline{p}$ يكونا فى وضعين مختلفين أيضا وبالتالى التيار الكهربائى يمر بالدائرة بسبب

- إذا كان المفتاح p فى وضع تشغيل بينما المفتاح q فى وضع عدم تشغيل فإن التيار الكهربائى سوف يمر بالسلك العلوى.
- إذا كان المفتاح p فى وضع عدم تشغيل بينما المفتاح q فى وضع تشغيل فإن التيار الكهربائى سوف يمر بالسلك السفلى.

# تمارين الفصل الثامن

١ - اكتب بلغة المنطق ما تعنيه كل من الدوائر الآتية :




q
p
$\bar{q}$
$\bar{p}$
p
r
$\bar{q}$
$\bar{p}$
p
q
$\bar{q}$
r
r
p
$\bar{q}$
p
q
$\bar{q}$
$\bar{p}$
r
q
p
r
r
$\bar{r}$

٢ - ارسم دائرة مفاتيح كهربائية لتمثيل كل من التقارير الآتية :

1 - $p \wedge (\sim p \vee q)$

2 - $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$

3 - $p \rightarrow q$

4 - $p \leftrightarrow q$

5 - $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

6 - $(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge (r \vee \sim q))$

7 - $((r \vee p) \wedge (q \vee \sim r)) \vee \sim p$

8 - $((p \vee q) \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge r)$

9 - $r \rightarrow (p \wedge q)$

10 - $(p \wedge (p \vee \sim q)) \wedge (q \vee \sim r)$

11 - $(p \vee (r \vee q)) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

12 - $(p \wedge q) \vee (r \wedge \sim p)$

13 - $\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q)$

14 - $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee r)$

15 - $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

16 - $((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee (\sim p \vee \sim q)$

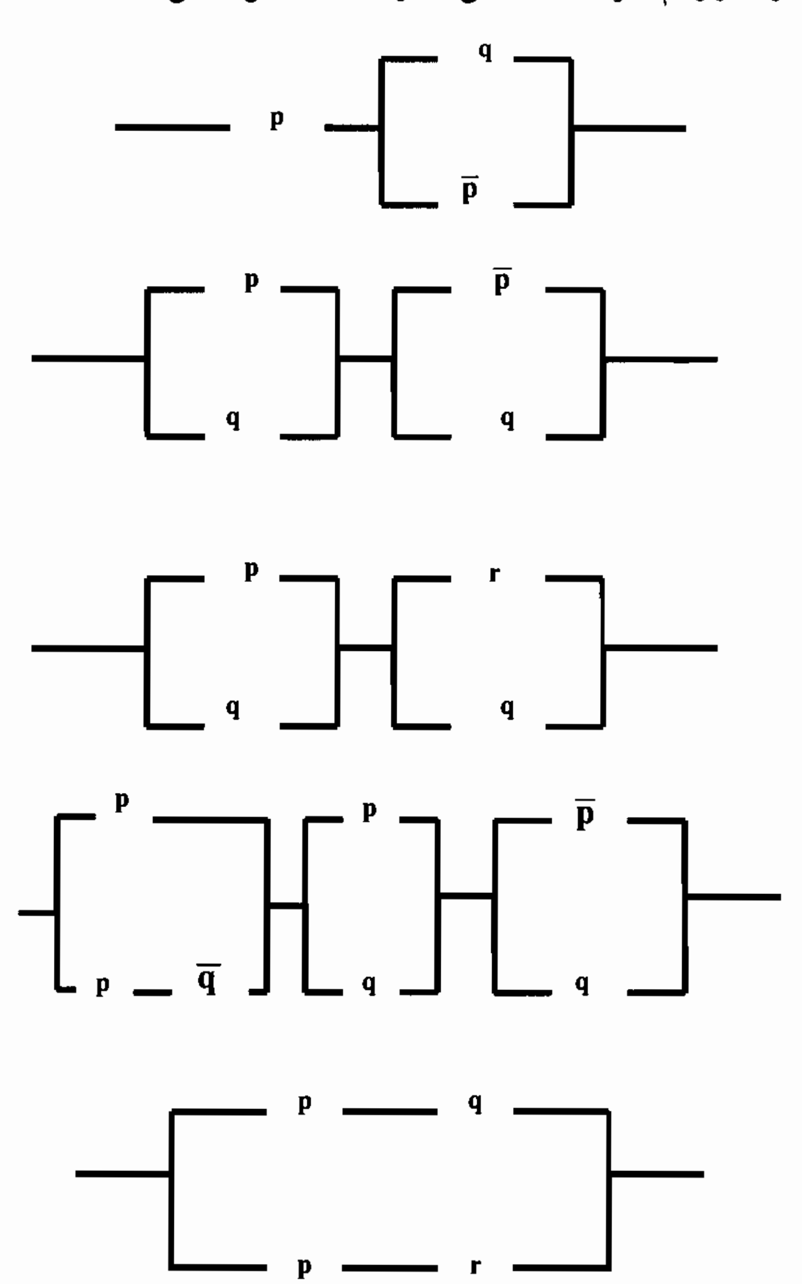
17 - $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

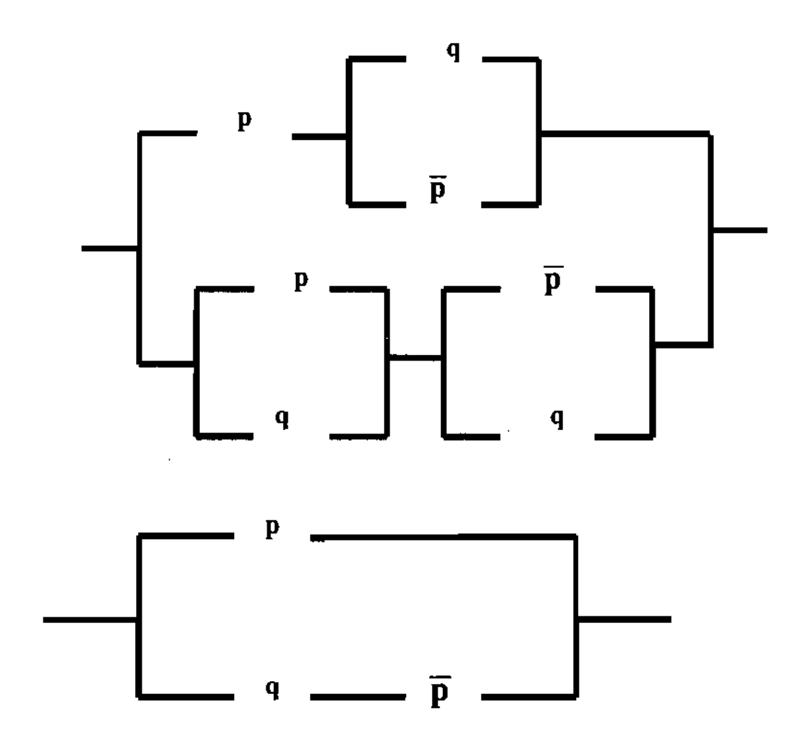
18 - $((p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$

19 - $(p \wedge (\sim q \vee r)) \vee q$

20 - $(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \wedge (\sim q \wedge p))$

٣ - أوجد وارسم دائرة مبسطة تكافئ الدائرة المعطاة فى كل مما يأتى :






٤ – ارسم دائرة مفاتيح كهربائية لتمثيل كل من التقارير الآتية فى ابسط صورة :

(1) $p \rightarrow (\sim q \wedge r)$

(2) $\sim q \rightarrow \sim p$

(3) $(p \rightarrow q) \rightarrow q$

(4) $\sim (\sim p \wedge \sim q)$

(5) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(6) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(7) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

(8) $\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q)$

(9) $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

(10) $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$

(11) $(p \wedge (\sim q \vee r)) \vee q$

(12) $(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (\sim q \wedge p))$

(13) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(14) $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(15) $((p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$

٥ - فى اجتماع بين ثلاثة مديرين بأحد الشركات ( رأفت - محمد - سمير ) يراد التصويت على قرار بالموافقة أو عدم الموافقة وفقا لقاعدة الأغلبية، بمعنى انه يتم الموافقة على اتخاذ القرار إذا وافق اثنين على الأقل ويتم عدم الموافقة على اتخاذ القرار إذا لم يوافق اثنين على الأقل، علما بأن الثلاثة سوف يشتركون بصورة فعلية فى التصويت ( لا يوجد امتناع عن التصويت ). المطلوب رسم دائرة فى ابسط صورة توضح عملية اتخاذ القرار.



ملحق



# ملحق ( أ ) المجموعات

# Sets

## ١ – مقدمة

مفهوم المجموعة يستخدم كثيرا فى الرياضيات، فالطلاب يدرسون نظرية المجموعات بشـــكل أو بآخر فى جميع المستويات فى الرياضيات بدءا من المدرسة الابتدائية وصولا إلى الجامعة، حتى أنــه يمكننا القول بأن نظرية المجموعات تمثل فكرة موحدة تربط كل فروع الرياضيات بل واكثر من ذلك فهى تعتبر وسيلة ناجحة جدا لتوحيد لغة الرياضيات. وفى المفهوم الرياضى فــإن كلمــة مجموعة **Set** تطلق فقط على التجمعات من الأشياء المتمايزة والمعرفة تعريفا جيـــدا، وهـــذه الأشياء تسمى عناصر المجموعة **elements** وهى محددة تحديدا دقيقا لا يقبل الغموض، بمعـنى أنه لأى عنصر فإننا نستطيع الحكم على ما إذا كان العنصر موجود ضمن عناصر المجموعـــة أم غير موجود. ومن أمثلة المجموعات:

- مجموعة كتب الرياضيات فى مكتبة كلية التربية بجامعة عين شمس.
- مجموعة أسماء الطلاب بالفصل.
- مجموعة شهور السنة الميلادية .
- مجموعة الأعداد الصحيحة من العدد **1** إلى العدد **100** .

بينما "أسماء الطلاب طوال القامة بالفصل" لا تمثل مجموعة لأنها غير معرفة تعريفا جيدا. ويرمـز للمجموعة بأحد الحروف الكبيرة ... , A , B , C بينما يرمز لعناصر المجموعة بـــالحروف الصغيرة ... , a , b , c وإذا كان العنصر a ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصـــر

a ينتمى إلى المجموعة A ويكتب $a \in A$ حيث الرمز $\in$ يمثل الانتماء أما إذا كان العنصر a ليس من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمى إلى المجموعة A ويكتب $a \notin A$ حيث الرمز $\notin$ يمثل عدم الانتماء. ويمكن وصف المجموعة بكتابة عناصرها بين قوسين من النوع { } ، على أن توضع فواصل بين العناصر، وترتيب العناصر داخل المجموعة ليس له أهمية وكذلك تكرار عنصر فى المجموعة لا يغير من المجموعة لان العبرة بالعناصر المختلفة داخل المجموعة وتسمى هذه الطريقة لوصف المجموعة بطريقة السرد أو القائمة roster form ، فمثلا المجموعة $\{a, e, i, o, u\}$ هى نفسها المجموعة $\{a, e, a, o, u, i, o, u\}$ وإذا كانت المجموعة تحتوى على عناصر كثيرة فإننا نستخدم ثلاث نقاط، ... ، لوصف أن المجموعة تحتوى على عناصر أخرى ومن السهل على القارئ تقديرها ومعرفتها بسهولة، فمثلا إذا كانت A هى مجموعة الأعداد الصحيحة من العدد 1 إلى العدد 100 فإنه يمكن كتابة A بالصورة $A = \{1, 2, 3, \ \ldots \ , 100\}$ ، ولأى مجموعة S فإن عدد عناصرها يرمز له بالرمز $n(S)$ وعندما يكون $n(S) < \infty$ فإن المجموعة S تسمى مجموعة منتهية Finite Set وخلاف ذلك فإن المجموعة S تسمى مجموعة غير منتهية Infinite Set، فمثلا المجموعة $A = \{1, 2, 3, \ \ldots \ , 100\}$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها $n(A) = 100$ بينما المجموعة $B = \{2, 4, 6, \ \ldots \ \}$ مجموعة غير منتهية ويرمز لذلك $n(B) = \infty$ . وإذا كانت المجموعة لا تحتوى على أى عنصر فإنها تسمى بالمجموعة الخالية Empty Set ويرمز لها بالرمز $\Phi$ أو بالرمز { } فمثلا إذا كانت S هى مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من 5 واصغر من 3 فإن S تكون هى المجموعة الخالية. وتوجد طريقة ثانية لوصف المجموعات تسمى بطريقة الصفة المميزة Set – builder notation حيث يتم كتابة أحد عناصر المجموعة مع ذكر الصفة المميزة للمجموعة ويعبر عنها بالصورة $\{x \mid p(x)\}$ وتقرأ مجموعة العناصر x التى تحقق الخاصية $p(x)$ ، والمتغير x يمثل عنصر اختيارى من عناصر المجموعة، والخط الرأسى" | " يعنى حيث أن ، فمثلا

- مجموعة شهور السنة الميلادية يعبر عنها بالصورة $\{x \mid x$ اسم شهر من شهور السنة الميلادية$\}$
- مجموعة الأعداد الزوجية يعبر عنها بالصورة $\{x \mid x$ عدد زوجى$\}$
- مجموعة حل المعادلة $x^2 - 9 = 0$ يعبر عنها بالصورة $\{x \mid x^2 - 9 = 0\}$.
- المجموعة التى عناصرها أرقام العدد 151985 يعبر عنها بالصورة $\{x \mid x$ رقم من أرقام العدد $151985\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 10 يعبر عنها بالصورة $\{x \mid x$ عدد صحيح موجب أقل من عشرة$\}$

وإذا كانت A , B مجموعتان غير خاليتان فإن حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة A فى المجموعة B يكون مجموعة يرمز لها A x B وتعرف بالصورة

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

فمثلا إذا كانت $B = \{a, b\}$ ، $A = \{1, 2\}$ فإن

$$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) \}$$

## ٢ – المجموعات الجزئية Subsets

إذا كانت A , B مجموعتان بحيث أن كل عنصر فى المجموعة A موجود أيضاء فى المجموعة B، أى إن المجموعة A محتواه بالكامل فى المجموعة B، فى هذه الحالة يقال أن المجموعة A مجموعة جزئية Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subseteq B$ ( أو $B \supseteq A$ ). وإذا كانت $A \subseteq B$ ولكن يوجد عنصر واحد على الأقل فى المجموعة B وغير موجود فى المجموعة A، فى هذه الحالة يقال أن A مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subset B$ ( أو $B \supset A$ ). وحيث إن المجموعة الخالية $\Phi$ لا تحتوى على أى عنصر، أذن لا يمكن إيجاد عنصر فى المجموعة الخالية $\Phi$ وغير موجود فى أى مجموعةA وبالتالى فإن المجموعة الخالية $\Phi$ تكون مجموعة جزئية من أى مجموعةA ( $\Phi \subseteq A$ ) كما أن أى

مجموعة تكون مجموعة جزئية من نفسها( $A \subseteq A$ ) . وبفرض المجموعة $A=\{a,b\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعةA تكون $\{b\}, \{a\}, A, \Phi$ وعددها يساوى $2^2$ وبالمثل للمجموعة $B = \{a, b, c\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة B تكون $\{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, B, \Phi$ وعددها يساوى $2^3$ ، وبوجه عام، إذا كانت المجموعة A تحتوى على n من العناصر ( $n(A) = n$ ) فإن عدد المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A يساوى $2^n$ . ومجموعة كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة A تسمى مجموعة القوة Power Set للمجموعة A ويرمز لها بالرمز $p(A)$ .

مثال ١ : نفرض المجموعتان $A=\{a,b\}$ , $B=\{a,b,c\}$

أذن $p(A) = \{\Phi, A, \{a\}, \{b\}\}$ ومجموعة القوة للمجموعة B تكون

$$p(B) = \{\Phi, B, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

ويقال أن المجموعتين A , B متساويتين ويرمز لذلك $A = B$ إذا وفقط إذا احتويتا على نفس العناصر، بمعنى أن كل عنصر فى المجموعة A موجود فى المجموعة B ( $A \subseteq B$ ) وكل عنصر فى المجموعة B موجود فى المجموعة A ( $B \subseteq A$ ) . وفى أى مناقشة خاصة بالمجموعات فإنه يتحتم علينا تعيين مجموعة ثابتة بحيث أن جميع المجموعات التى نتعامل معها فى المناقشة تكون مجموعات جزئية منها وفى هذه الحالة نسمى تلك المجموعة الثابتة بالمجموعة الشاملة Universal Set ويرمز لها بالرمز U ، وبالتالى فإنه لأى مجموعة A فإن $\Phi \subseteq A \subseteq U$ .

## ٣ – العمليات على المجموعات Set Operations

إذا كانت A , B مجموعتان فإن تقاطعهما هو المجموعة التى تتكون من جميع العناصر المشتركة التى تنتمى إلى كل من A , B معا ويرمز لذلك $A \cap B$ ، أى إن

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ ، واتحادهما هو المجموعة التى تحتوى على جميع العناصر الموجودة فى $A$ أو الموجودة فى $B$ ويرمز لذلك $A \cup B$، أى إن $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ وبوجه عام إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات فإن تقاطعها يعرف بالصورة $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \forall \quad 1 \le i \le n \quad , \quad x \in A_i \}$

واتحادها يعرف بالصورة $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \exists \quad 1 \le i \le n \quad : \quad x \in A_i \}$.

ويقال للمجموعتين $B$ , $A$ إنهما منفصلتين إذا وفقط إذا كان $A \cap B = \Phi$ . ومكملة المجموعة $A$ فى المجموعة الشاملة $U$ يرمز لها $A'$ وتعرف بأنها مجموعة كل العناصر الموجودة فى المجموعة الشاملة $U$ والغير موجودة فى المجموعة $A$، أى إن $A' = \{ x \mid x \in U \wedge x \notin A \}$ ، ونلاحظ أن مكملة المجموعة الشاملة $U$ تكون المجموعة الخالية $\Phi$ ( $U' = \Phi$ ) ومكملة المجموعة الخالية $\Phi$ تكون المجموعة الشاملة ( $\Phi' = U$ ) ولأى مجموعة $A$ فإن $A'' = A$ . والفرق بين المجموعتان $B$ , $A$ يرمز له $A - B$ ويعرف كالآتى:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} = A \cap B'$$

والفرق المتماثل بين المجموعتان $B$ , $A$ يرمز له $A \Delta B$ (ويقرأ $A$ دلتا $B$ ) ويعرف كالآتى:

$$A \Delta B = ( A - B ) \cup ( B - A )$$

مثال ٢ : نفرض المجموعة الشاملة $U = \{ a , b , c , d , e , f , g , h \}$ ونفرض المجموعتان

$$A = \{ a , c , d , h \} \quad , \quad B = \{ b , c , d \}$$

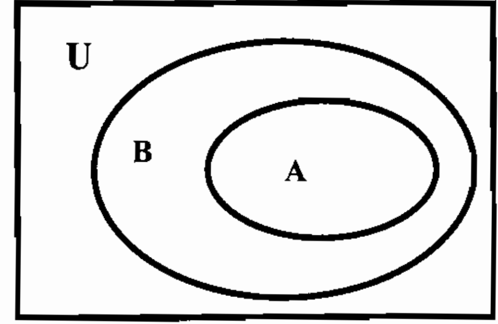
فى الجدول الآتى نضع بعض العمليات على المجموعتان $B$ , $A$

| | |
|---|---|
| $A'' = \{b, e, f, g\}' = A$ | $A \cap B = \{c, d\}$ |
| $B' = \{a, e, f, g, h\}$ | $A \cup B = \{a, b, c, d, h\}$ |
| $A' \cup B' = \{a, b, e, f, g, h\}$ | $A - B = \{a, h\}$ |
| $(A \cap B)' = \{a, b, e, f, g, h\}$ | $B - A = \{b\}$ |
| $A' \cap B' = \{e, f, g\}$ | $A \Delta B = \{a, b, h\}$ |
| $(A \cup B)' = \{e, f, g\}$ | $A' = \{b, e, f, g\}$ |

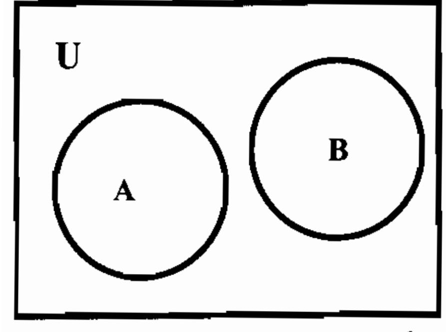
## ٤ - أشكال فن Venn Diagrams

جون فن عالم رياضى إنجليزى ( ١٨٣٤- ١٩٢٣). وهو أول من استخدم الأشكال لتمثيل المجموعات. وأشكال فن ما هى إلا وسيلة تعليمية بسيطة لتوضيح العلاقة بين المجموعات، وهى تساهم فى تصور وأدراك وحل الكثير من الصعوبات المتعلقة بالمنطق ونظرية المجموعات، وفى أشكال فن كثيرا ما نستخدم الشكل المستطيل ليمثل المجموعة الشاملة U بينما توضع المجموعات الجزئية على هيئة أشكال بيضاوية أو دائرية داخل هذا المستطيل. وفى الأمثلة الآتية نبين كيفية استخدام أشكال فن فى توضيح العلاقة بين المجموعات.

مثال ٣ : نفرض المجموعتين A, B . العلاقات $A \subset B$ , $A \cap B = \Phi$ موضحة فى أشكال فن الآتية:

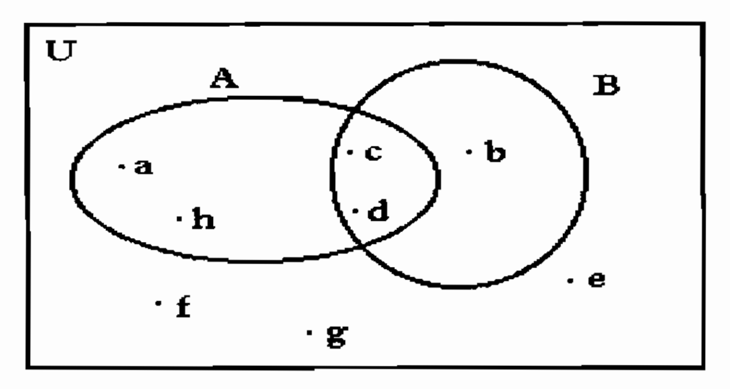



شكل فن يوضح $A \subset B$ حيث نلاحظ أن المجموعة A واقعة داخل المجموعة B

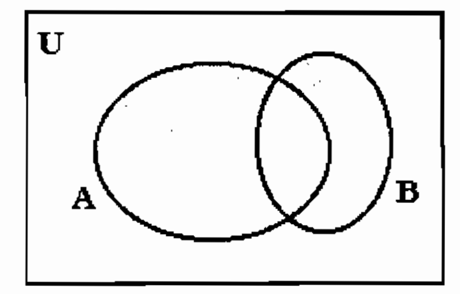



شكل فن يوضح $A \cap B = \Phi$ حيث نلاحظ أن المجموعتين A , B منفصلتين .

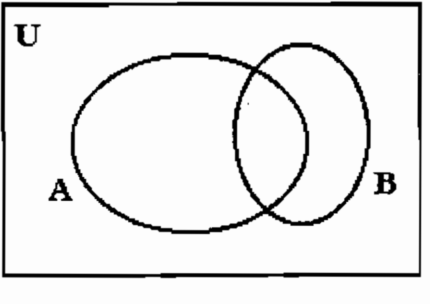
مثال ٤ : نفرض المجموعة الشاملة $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ونفرض المجموعتان $A = \{a, c, d, h\}$ , $B = \{b, c, d\}$ . العلاقة بين المجموعات U , A , B موضحة بشكل فن الآتى :



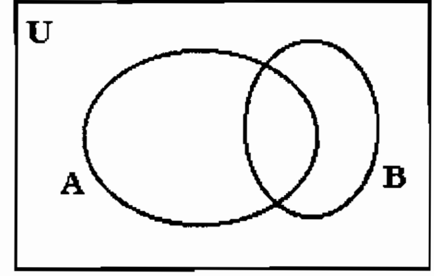

نفرض المجموعتان الغير خاليتان A , B من مجموعة شاملةU. العمليات على المجموعات (التقاطع – الاتحاد – المكملة – الفرق – الفرق المتماثل) موضحة فى أشكال فن الآتية:



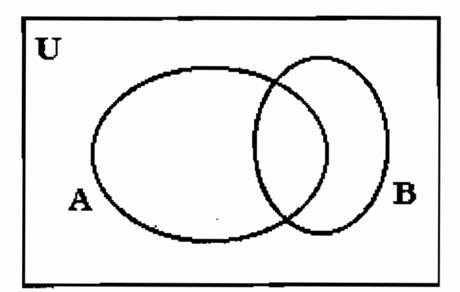

الجزء المظلل يمثل $A \cup B$



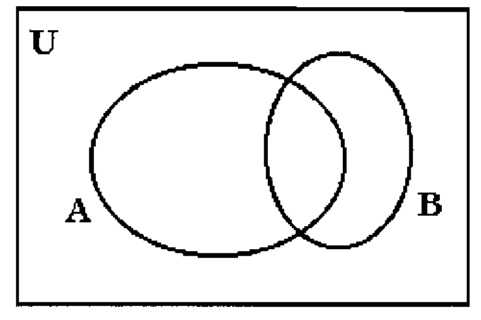

الجزء المظلل يمثل $A \cap B$



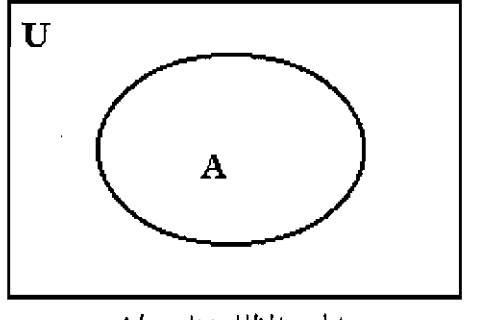

الجزء المظلل يمثل $B - A = B \cap A'$




الجزء المظلل يمثل $A - B = A \cap B'$

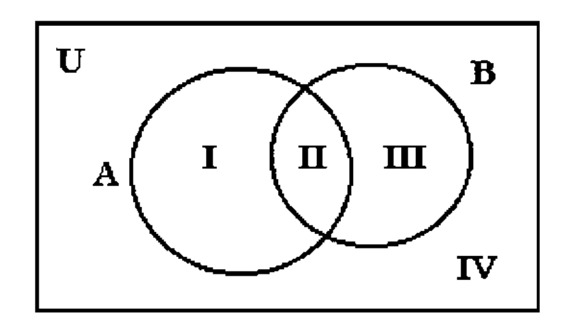



الجزء المظلل يمثل $A \,\Delta\, B$




الجزء المظلل يمثل $A'$

وعند التعامل مع مجموعتين A , B من مجموعة شاملةU ، ولكى نتمكن من توضيـــــح جميـــع العلاقات بينهما فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتى:




ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة فى الشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفـــة بالشـــكل، فمثلا

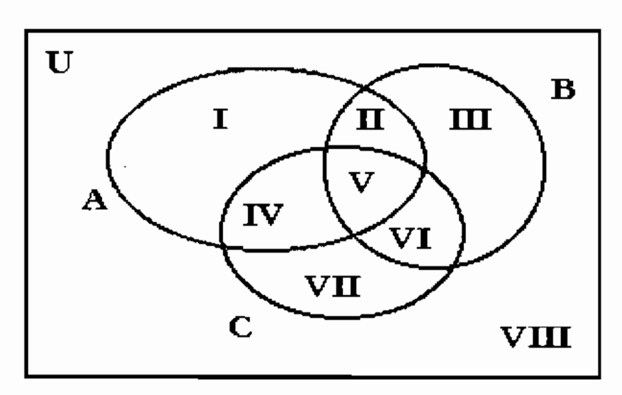
$A \cap B$ يمثلها المنطقة II

$A \cup B$ يمثلها المناطق I , II , III

$A - B$ يمثلها المنطقة I

$(A \cup B)'$ يمثلها المنطقة IV

وعند التعامل مع ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U ولكى نتمكن مـــن توضيح جميع العلاقات بينهما فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتى :

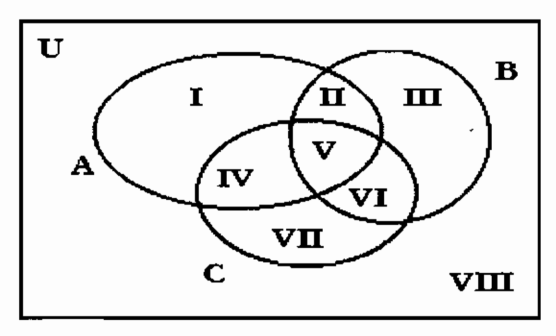



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة في الشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفة بالشكل، فمثلا

| | | |
|---|---|---|
| $A \cap B \cap C$ | يمثلها المنطقة | V |
| $A \cup (B \cap C)$ | يمثلها المناطق | I , II , IV , V , VI |
| $(A \cup B) \cap C$ | يمثلها المناطق | IV , V , VI |
| $(A \cup B)'$ | يمثلها المناطق | VII , VIII |

مثال ٦ : نفرض ثلاث مجموعات $A$ , $B$ , $C$ من مجموعة شاملة $U$. استخدم أشكال فن في توضيح المجموعة $(A \cap B) \cup (C - A)$ .

الحل : في شكل فن نقوم بتظليل $A \cap B$ ويمثلها المناطق V , II



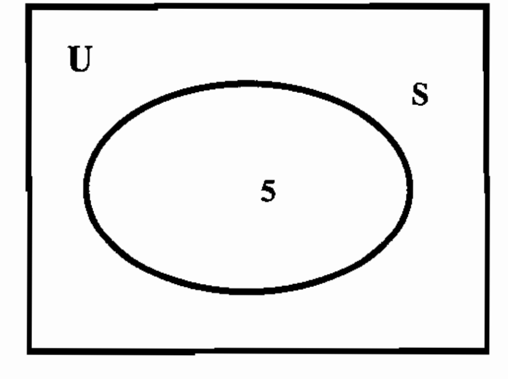

ثم نقوم بتظليل $A - C$ ويمثلها المناطق VI, VII وبالتالى فإن $(A - C) \cup (A \cap B) \cup (C - A)$ يمثلها المناطق VII , VI , V , II المظللة بالشكل.

وفائدة أشكال فن لا تقتصر فقط على توضيح العلاقة بين المجموعات وإنما يمكن استخدامها فى التعرف على عدد العناصر فى المجموعات المختلفة، فإذا كانت المجموعة S تحتوى على n من العناصر المختلفة، أى إن $n(S) = n$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن بطريقتين:

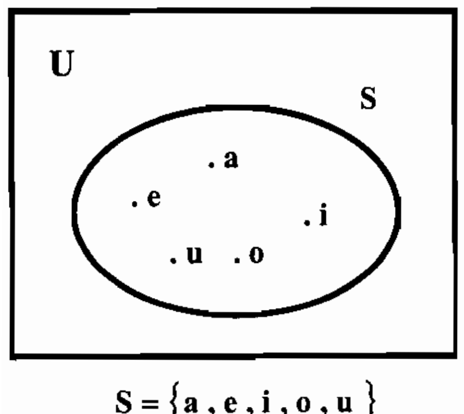
الطريقة الأولى : يتم فيها كتابة العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S وهذه الطريقة تكون صعبة فى حالة إذا كانت المجموعة S تحتوى على عدد كبير من العناصر.

الطريقة الثانية : يتم فيها كتابة العدد الممثل لعدد العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S.

مثال ٧ : للمجموعة $S = \{a, e, i, o, u\}$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن كالآتى :



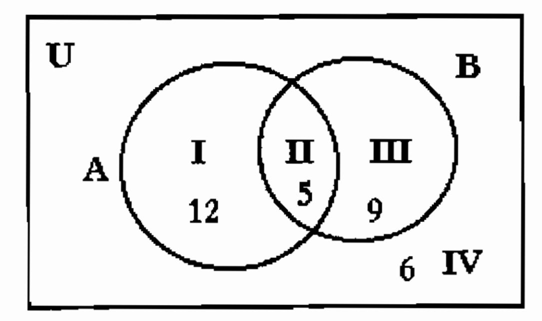

$n(S) = 5$






$S = \{a, e, i, o, u\}$

مثال ٨ : فى شكل فن الآتى



الأعداد 6 , 9 , 5 , 12 تمثل أعداد العناصر فى المناطق I , II , III , IV على الترتيب ومن الشكل يمكن استنتاج كل مما يأتى :

$n(A) = 12 + 5 = 17$ , $n(A') = 9 + 6 = 15$

$n(B) = 5 + 9 = 14$ , $n(A \cup B) = 12 + 5 + 9 = 26$

$n(A \cap B) = 5$ , $n(A \Delta B) = 12 + 9 = 21$

نظرية ١ : إذا كانت A , B مجموعتين منتهيتين فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وكنتيجة لهذه النظرية فإنه إذا كانت A , B مجموعتين منتهيتين ومنفصلتين فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

وكذلك إذا كانت A , B , C ثلاث مجموعات منتهية فإن

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

وأشكال فن يمكن استخدامها فى حل المسائل التى تحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات كما نوضح فى الأمثلة الآتية :

مثال ٩: فى مجموعة معينة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء واللغة الإنجليزية، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء، 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية، 22 طالب يدرسون الفيزياء واللغة الإنجليزية، 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط، 5 طلاب يدرسون اللغة الإنجليزية فقط. أوجد ما يأتى:

( ١ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات.

( ٢ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء.

( ٣ ) عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث.

الحل : هذه المثال يحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات لذلك يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن. ونلاحظ بالمثال انه يوجد ثلاث مقررات دراسية وبالتالى يكون لدينا ثلاث دوائر فى شكل فن، نفرض المجموعة A تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة الرياضيات، المجموعة B تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة الفيزياء والمجموعة C تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة اللغة الإنجليزية. ومن المفضل أن نبدأ مع البيانات الأكثر وضوحا والتى يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتمثل الأساس الذى ننطلق منه لإكمال باقى البيانات داخل الشكل وفى هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحا هى الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاث وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلة لتقاطع المجموعات الثلاث $A \cap B \cap C$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العدد 16 فى المنطقة V. وإذا أخذنا الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء ويمثلهم $A \cap B$ فى المنطقتين V , II وعددهم 24 ، وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل، أذن يتبقى 8 طلاب وبالتالى نضع العدد 8 فى المنطقة II، وحيث أن 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ويمثلهم $A \cap C$ فى المنطقتين V , IV وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل، أذن نضع العدد 14 فى المنطقة 1V وبالمثل نضع العدد 6 فى المنطقة VI لأن 22 طالب يدرسون فيزياء ولغة إنجليزية، وحيث أن 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط فالهم ينتمون إلى المنطقة I وبالمثل نضع 10 طلاب فى المنطقة III التى تمثل الطلاب الذين يدرسون الفيزياء فقط وكذلك نضع 5 طلاب فى المنطقة VII التى تمثل الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية فقط، ومجموع الأعداد الموجودة فى شكل فن 66 وحيث أن عدد الطلاب فى المجموعة يساوى 75 أذن يتبقى 9 طلاب فى المنطقة VIII وبالتالى نحصل على شكل فن الموضح. والآن يمكننا الإجابة عن الأسئلة المطلوبة وغيرها، وذلك بمجرد النظر إلى شكل فن الموضح.

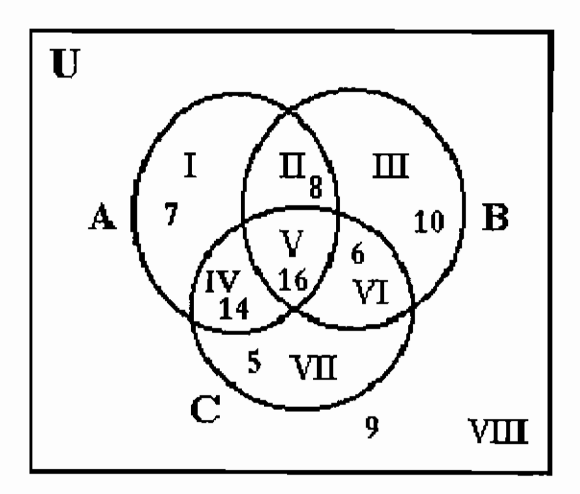
أذن

( ١ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات = $16 + 14 + 8 + 7 = 45$

( ٢ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء

$= 5 + 14 + 7 = 26$

( ٣ ) عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث = 9 .




مثال ١٠ : فى مجموعة معينة تتكون من 120 طالب بكلية التربيـة وجـد أن 100 طـالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية ، الفرنسية، الألمانية. ووجد أن 65 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية، 45 طالب يدرسون اللغة الفرنسـية، 42 طـالب يدرسون اللغة الألمانية، 20 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية، 25 طـالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانية، 15 طالب يدرسون اللغة الفرنسـية والألمانيـة. أوجد عدد الطلاب الذين يدرسون اللغات الثلاث ووضح عدد الطلاب فى كل من المناطق الثمانية بشكل فن.

الحل : نفرض $A , B , C$ ترمز إلى مجموعات الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية، الفرنسية، الألمانية. وحيث أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الثلاث، أذن

$$n(A \cup B \cup C) = 100$$

وبالتعويض فى القانون

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$
$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

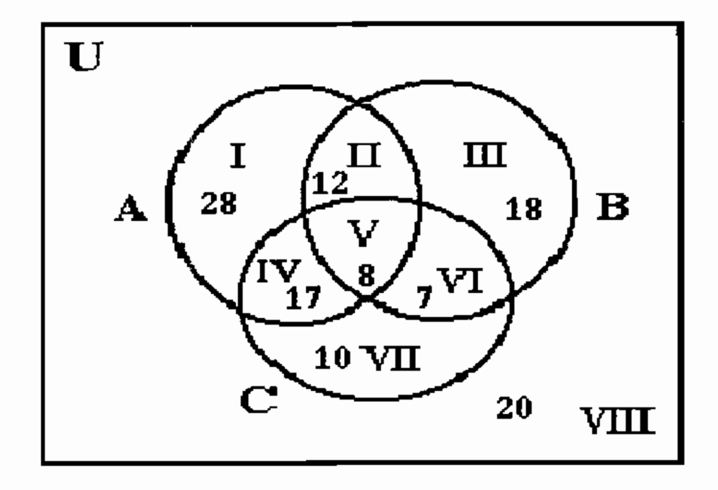
أذن

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

وبالتالى

$$n(A \cap B \cap C) = 8$$

أى أن 8 طلاب يدرسون اللغات الثلاث . والآن نستخدم هذه النتيجة لملء شكل فن كما وضحنا بالمثال السابق، وبالتالى عدد الطلاب فى كل من المناطق الثمانية بشكل فن يكون كما موضح بالشكل الآتى:



## ٥ - جداول الانتماء Membership Tables

يمكن تعريف جداول الانتماء بطريقة مماثلة للطريقة التى عرفنا بها جداول الحقيقة فى المنطق، فإذا كانت $A \neq \Phi$ وكان $x$ عنصرا ما، فإنه إما أن يكون $x \in A$ أو $x \notin A$ ، وإذا كانت $A$ , $B$ مجموعتين غير خاليتين وكان $x$ عنصرا ما، فإن الجدول الآتى يصف الاحتمالات الممكنة لانتماء العنصر $x$ أو عدم انتمائه فى المجموعتين $A$ , $B$

| A | B |
|---|---|
| ∈ | ∈ |
| ∈ | ∉ |
| ∉ | ∈ |
| ∉ | ∉ |

وجداول الانتماء للعمليات على المجموعات موضحة كالآتى :

| A | A′ |
|---|---|
| ∈ | ∉ |
| ∉ | ∈ |

جدول الانتماء للمكملة

$A'$

| A | B | A ∪ B |
|---|---|---|
| ∈ | ∈ | ∈ |
| ∈ | ∉ | ∈ |
| ∉ | ∈ | ∈ |
| ∉ | ∉ | ∉ |

جدول الانتماء للاتحاد

$A \cup B$

| A | B | $A \Delta B$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للفرق المتماثل

$A \Delta B$

| A | B | $A \cap B$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للتقاطع

$A \cap B$

| A | B | $B - A$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للفرق

$B - A$

| A | B | $A - B$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للفرق

$A - B$

ونلاحظ من جدول الانتماء للاتحاد $A \cup B$ أن

$$x \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B$$

كما نلاحظ من جدول الانتماء للتقاطع $A \cap B$ أن

$$x \notin A \cap B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \vee \quad x \notin B$$

ولإثبات أن $A \subseteq B$ نفرض $x \in A$ ونحاول إثبات أن $x \in B$ . وتعتبر جداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جدا لبرهنة الكثير من الخواص والنظريات المتعلقة بالمجموعات.

مثال ١٠ : باستخدام جداول الانتماء أثبت أن $A - B = A \cap B'$

الحل : بتكوين جدول الانتماء

| $A$ | $B$ | $B'$ | $A - B$ | $A \cap B'$ |
|---|---|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |

$\uparrow \qquad \uparrow$

العمودين الرابع والخامس منطبقان كما يظهر بالجدول وبالتالى يتحقق أن $A - B = A \cap B'$

مثال ١١ : باستخدام جداول الانتماء اثبت أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$

الحل : بتكوين جدول الانتماء

| $A$ | $B$ | $A \cap B$ | $A'$ | $B'$ | $(A \cap B)'$ | $A' \cup B'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ |

$\uparrow \qquad \uparrow$

العمودين السادس والسابع منطبقان كما يظهر بالجدول وبالتالى يتحقق أن

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

## ٦ – بعض الخواص فى جبر المجموعات

نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U. فى الجدول الآتى نعرض قائمة من القوانيـــن ، تسمى جبر المجموعات، ويمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الانتماء.

| اسم القانون | جبر المجموعات |
|---|---|
| قوانين اللانمو<br>**Idempotent Laws** | $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ |
| قوانين الإبدال<br>**Commutative Laws** | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| قوانين الدمج<br>**Associative Laws** | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| قوانين التوزيع<br>**Distributive Laws** | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| قوانين الوحدة<br>**Identity Laws** | $A \cup \Phi = A \quad , \quad A \cap U = A$<br>$A \cup U = U \quad , \quad A \cap \Phi = \Phi$ |
| قوانين المكملة<br>**Complement Laws** | $A \cup A' = U \quad , \quad A \cap A' = \Phi$<br>$U' = \Phi \quad , \quad \Phi' = U$<br>$A'' = A$ |
| قوانين ديمورجان<br>**De Morgan's Laws** | $(A \cup B)' = A' \cap B'$<br>$(A \cap B)' = A' \cup B'$ |

ونلاحظ من الجدول أن هناك تشابه كبير بين قوانين جبر المجموعات وقوانين جـــبر التقـــارير بالفصل الثالث، ويأتى هذا التشابه من التناظر بين العمليات الأساســية فى جـــبر المجموعـــات (الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ والمكملة) وأدوات الربط المنطقية فى جـــبر التقـــارير (الوصـــل $\vee$ والفصل $\wedge$ والنفى $\sim$ ). ونلاحظ فى الجدول أيضا أن القوانين مرتبة فى صـــورة ثنائيـــات (أزواج) وهذا الترتيب يعتمد على مبدأ هام فى جبر المجموعات يسمى مبدأ الثنائية (الـــترافق)

Duality Principle وينص على أن صحة متطابقة ما فى جبر المجموعات تقتضـــى صحـــة متطابقة أخرى تسمى بالمتطابقة الثنائية (المرافقـــة) ونحصـــل عليـــها مـــن إحـــلال ظـــهور $U\ ,\ \Phi\ ,\ \bigcup\ ,\ \bigcap$ محل $\Phi\ ,\ U\ ,\ \bigcap\ ,\ \bigcup$ على الترتيب. ونلاحـــظ فى أزواج القوانين بالجدول أن كل قانون مرافق للآخر.

مثال ١٢ : باستخدام التعاريف اثبت صحة قانون ديمورجان $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$

الحل : من شرط تساوى مجموعتان نحاول إثبات

$$1-\quad (A \bigcup B)' \subseteq A' \bigcap B'$$
$$2-\quad A' \bigcap B' \subseteq (A \bigcup B)'$$

ولإثبات (1) نفرض أن $x \in (A \bigcup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \bigcup B)' &\Rightarrow x \notin A \bigcup B \\ &\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \bigcap B' \end{aligned}$$

وبالتالى ينتج أن $(A \bigcup B)' \subseteq A' \bigcap B'$

ولإثبات (2) نفرض أن $x \in A' \bigcap B'$

$$\begin{aligned} x \in A' \bigcap B' &\Rightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Rightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \bigcup B \\ &\Rightarrow x \in (A \bigcup B)' \end{aligned}$$

وبالتالى ينتج أن $A' \bigcap B' \subseteq (A \bigcup B)'$

ويمكن إثبات ما سبق باستخدام التضمين $\Leftrightarrow$ كالأتى : نفرض أن $x \in (A \bigcup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \bigcup B)' &\Leftrightarrow x \notin A \bigcup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A' \quad \wedge \quad x \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in A' \bigcap B' \end{aligned}$$

وبالتالى ينتج أن $( A \cup B )' = A' \cap B'$ . ووفقا لمبدأ الثنائية فـإن القـانون المرافـق $( A \cap B )' = A' \cup B'$ يكون متحقق أيضا.

مثال ١٣ : باستخدام قوانين جبر المجموعات اثبت صحة $A - ( B \cup C ) = ( A - B' ) - C$

الحل :

| | |
|---|---|
| من تعريف الفرق | $A - ( B \cup C ) = A \cap ( B \cup C )'$ |
| قانون ديمورجان | $= A \cap ( B' \cap C' )$ |
| قانون الدمج | $= ( A \cap B' ) \cap C'$ |
| من تعريف الفرق | $= ( A - B' ) - C$ |

مثال ١٤ : فى الجدول الآتى نضع بعض المتطابقات فى جبر المجموعات ونوضح المتطابقة المرافقة لكل منها.

| المتطابقة المرافقة | المتطابقة |
|---|---|
| $A \cup A' = U$ | $A \cap A' = \Phi$ |
| $A \cap A' = \Phi$ | $A \cup A' = U$ |
| $A \cup (B \cap A) = A$ | $A \cap (B \cup A) = A$ |
| $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$ | $A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap C'$ |
| $(\Phi \cup A) \cap (B \cup A) = A$ | $(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$ |
| $(\Phi \cap A) \cap (A \cup U) = \Phi$ | $(U \cup A) \cup (A \cap \Phi) = U$ |
| $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |

# تمارين ملحق أ

١ - إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$

( ا ) اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة A .

( ب ) اكتب جميع المجموعات الجزئية B بحيث يكون $\{b\} \subseteq B$ ، $B \subseteq A$ ، $B \neq A$ .

( ج ) اكتب جميع المجموعات الجزئية C بحيث يكون $n(C) \leq 2$ .

( د ) فى الجدول الآتى وضح أى من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ ؟ ولماذا ؟

| | | |
|---|---|---|
| $a \in A$ | $n(\{a\}) = n(\{b\})$ | $\Phi \subseteq \{a\}$ |
| $\{a, b\} \in A$ | $\{\{a, b\}\} \in p(A)$ | $\Phi \in A$ |
| $\{a, d\} \subseteq \{b, d, c\}$ | $\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ | $\Phi \in p(A)$ |
| $\{a, b\} \subseteq p(A)$ | $\{c\} \subseteq \{\{a\}, \{c\}\}$ | $\Phi \subseteq p(A)$ |
| $\{a, c\} = \{c, a, c\}$ | $\{d\} \in \{\{d, c\}, \{c\}\}$ | $\Phi \in p(\Phi)$ |

٢ - اكتب كل من المجموعات الآتية باستخدام الصفة المميزة

(1) $A = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$

(2) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

(3) $C = \{1, 3, 5, \ldots\}$

(4) $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$

٣ - إذا كانت $B = \{b, d, e\}$ , $A = \{a, b, c, d\}$ فأوجد كل من

$A \times B$ , $B \times A$ , $A \times A$ , $p(B)$ , $p(A \cap B)$, $p(A - B)$ , $p(A \times B)$

٤ – إذا كانت $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ فأوجد $n(X)$ فى كــل مــن الحالات الآتية :

$$(1)-\quad X = \{x \mid (x \in A) \wedge (2x > 17)\}$$
$$(2)-\quad X = \{x \mid (x \in A) \wedge (x^2 \geq x!)\}$$

٥ – إذا كـــانت $A = \{1,3,5,7\}$ , $B = \{2,3,6,12\}$ , $C = \{1,2,3,4,5,6,9\}$ مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3, \ldots ,12\}$ فاستخدم أشكال فــن فى إيجاد كل مما يأتى:

$$A \cup B \quad , \quad A \cup (B \cap C) \quad , \quad A - (B \cup C) \quad , \quad B - C'$$
$$(A \cap B)' \quad , \quad A \cap (B' - C) \quad , \quad A' \cap (B \cup C)' \quad , \quad (A' \cup C')'$$

٦ – نفرض أن $A, B, C$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة $U$ . أستخدم أشكال فــن فى وصف كل من المجموعات الآتية :

$$A \cup B' \quad , \quad A \cap (B \cup C) \quad , \quad A \cap (B \Delta C) \quad , \quad B \cap C'$$
$$(A \cap B)' \quad , \quad A - (B \cap C) \quad , \quad A' \cap (B \Delta C)' \quad , \quad (A' \cup C')'$$

٧ – نفرض أن $A, B, C$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة $U$. رتب المجموعــات الآتيــة بحيث تكون كل واحدة منها محتواة فى المجموعة التى تليها:

$$A \cup B \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A \cup B \cup C \quad , \quad A \cap B \cap C \quad , \quad \Phi' \quad , \quad A$$

٨ – وضح كل من القوانين الآتية باستخدام أشكال فن ثم أثبت كل منها باستخدام جـــداول الانتماء وكذلك أثبت كل منها باستخدام التعاريف:

1- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3- $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$

4- $A \cap (B \cup A) = A$

5- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

6- $A \Delta B = B \Delta A$

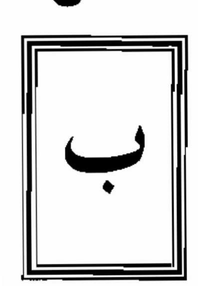
7- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

٩ - باستخدام جبر المجموعات أثبت كل مما يأتى:

$$1- \quad (A \cup (B' \cap C))' = (A' \cap B) \cup (A \cup C)'$$

$$2- \quad A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$$

١٠ - فى عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التى يمارسونها، فإذا كان 62 طالب يمارسون كرة القدم، 53 يمارسون كرة السلة، 65 يمارسون العاب القوى، 19 يمارسون كرة القدم وكرة السلة، 14 يمارسون كرة القدم والعاب القوى، 21 يمارسون كرة السلة والعاب القوى، 8 لا يمارسون أيا من الألعاب الثلاث. استخدم أشكال فن فى إيجاد عدد الطلاب الذين يمارسون لعبة واحدة فقط.



# ملحق ( ب ) مجموعات الأعداد

## Sets of Numbers

### ١ – مقدمة Introduction

مجموعات الأعداد تعتبر من المجموعات الهامة التى دائما ما تقابلنا فى دراسة الرياضيات، وتنقسم الأعداد إلى تسلسل من المجموعات الجزئية، وابسط الأعداد هى مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Numbers ويرمز لها بالرمز N، $N=\{1,2,3,\ldots\}$ ، وإذا بدئنا بمجموعة الأعداد الطبيعية N فإنه لجعل الطرح عملية ممكنة فى معادلات مثل " $x + a = b \quad , \quad a , b \in N \ , a > b$ " فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد الصحيحة Integers Numbers ويرمز لها بالرمز I ، $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ، ولجعل القسمة عملية ممكنة فى معادلات مثل " $a x = b \quad , \quad a, b \in I \ , a \neq b$ " فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers ويرمز لها بالرمز Q

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \ \middle| \ a , b \in I \ , b \neq 0 \right\}$$

ولملئ الفراغات بين مجموعات الأعداد السابقة فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد الغيرنسبية Irrational Numbers ويرمز لها بالرمز $Q'$ وهى الأعداد التى لا يمكن تمثيلها فى الصورة النسبية ومن أمثلة الأعداد الغير نسبية $\pi \quad , \quad \sqrt{2}$ ، وبعد ذلك تأتى مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز لها بالرمز R لتشمل كل مجموعات الأعداد السابقة أى أن $N \subset Z \subset Q \subset R$ . ومن اجل الحصول على حل لمعادلات فى الصورة

" $a > 0$ , $x^2 + a = 0$ " فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد المركبة Complex Numbers ويرمز لها بالرمز C

$$C = \{ a + ib \mid a, b \in R \}$$

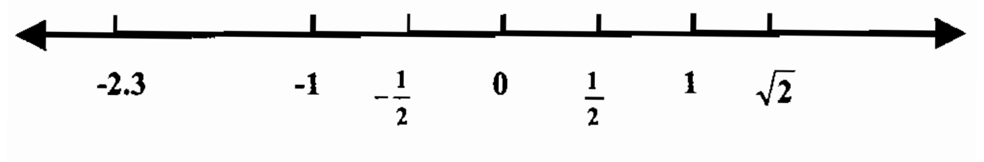
حيث $i = \sqrt{-1}$ مقدار تخيلي، وحيث أن، أى عدد حقيقى x يمكن كتابته فى الصورة $x = x + 0\,i$ أذن كل عدد حقيقى هو أيضا عدد مركب، وعلى ذلك فإن العلاقة بين مجموعات الأعداد تكون

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

## ٢ – التمثيل الهندسى للأعداد الحقيقية

## Geometric Representation

المفهوم الأساسى فى الرياضيات الذى يربط الرمز المجرد للعدد الحقيقى بالرمز الهندسى للنقطة هو تمثيل الأعداد الحقيقية كنقط على خط مستقيم ويتم ذلك عن طريق تحديد نقطة اختيارية O على خط مستقيم لتمثل العدد صفر 0 ونقطة أخرى u لتمثيل العدد 1، والنقطة O تسمى نقطة الأصل Origin والمسافة بين النقطة O والنقطة u تمثل وحدة القياس، وبواسطة النقطتين O , u فإن كل عدد حقيقى يمكن تمثيله كنقطة على هذا الخط المستقيم والعكس أيضا صحيح، أى إن كل نقطة على هذا الخط المستقيم تمثل عدد حقيقى، وهذا الخط المستقيم الذى يمثل الأعداد الحقيقية يسمى خط الأعداد Real Line والعدد المناظر للنقطة P على خط الأعداد يسمى إحداثى النقطة P، والأعداد الموجبة Positive Numbers يتم تحديدها بالنقط الواقعة فى الجهة اليمنى من نقطة الأصل O والأعداد السالبة Negative Numbers يتم تحديدها بالنقط الواقعة فى الجهة اليسرى من نقطة الأصل O، والعدد صفر 0 ليس موجب وليس سالب، وفى ضوء ذلك فإننا سوف نشير إلى الأعداد الحقيقية كنقط على خط الأعداد والشكل الآتى يوضح بعض الأعداد الحقيقية مرسومة كنقط على خط الأعداد



## ٣ - خواص الترتيب Order Properties

نفرض أن $a , b$ عدديين حقيقيين، يقال أن العدد $a$ اقل من العدد $b$ ، ويرمز لذلك $a < b$ إذا كان $b - a$ عدد موجب وهذا يكافئ أن نقول $b$ اكبر من $a$ ، ويرمز لذلك $b > a$ ، وهندسيا يكون $a < b$ إذا كانت النقطة $a$ تسبق النقطة $b$ (أى تقع على الجهة اليسرى منها) على خط الأعداد، والرمز $a \le b$ يعنى إما $a < b$ أو $a = b$ وبالمثل $b \ge a$ يعنى إما $b > a$ أو $b = a$ .

لأى عدديين حقيقيين $b$ , $a$ فإن واحدة فقط مما يأتى يتحقق:

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

وفى ضوء ذلك فإن الأعداد الحقيقية تكون مرتبة.

والرموز $\ge$ , $\le$ , $>$ , $<$ تسمى متباينات inequalities ولأى أعداد حقيقية $a , b , c , d$ فإن المتباينات تحقق الخواص الآتية:

1 - $a < b \quad , \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$

2 - $a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$

3 - $a < b \quad , \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$

4 - $a < b \quad , \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a\,c < b\,c$

5 - $a < b \quad , \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a\,c > b\,c$

والخواص المناظرة تتحقق للمتباينات $\ge$ , $\le$ , $>$ أيضا .

## ٤ - القيمة المطلقة Absolute Value

لأى عدد حقيقى $a \neq 0$ توجد خاصتين هامتين هما إشارة العدد $a$ ومقدار العدد $a$ ، وهندسيا فإن إشارة العدد $a$ تخبرنا عن ما إذا كان النقطة $a$ تقع على يمين أو يسار نقطة الأصل $0$ على خط الأعداد، ومقدار العدد $a$ يمثل المسافة بين النقطة $a$ ونقطة الأصل $0$ ، والعدد $0$

ليس له إشارة ومقداره يساوى صفر. ومقدار العدد $a$ يسمى القيمة المطلقة للعدد $a$ ويرمز له $|a|$ ويعرف أيضا كالآتى

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases}$$

أى إن القيمة المطلقة لأى عدد حقيقى تكون دائما غير سالبة، $|a|$ يمثل المسافة بين النقطة $a$ ونقطة الأصل $0$ وبالمثل $|a-b|$ يمثل المسافة بين النقطة $a$ والنقطة $b$ .

والقيمة المطلقة تحقق الخواص الآتية لأى عددين حقيقيين $a , b$ :

(1) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(2) $|-a| = |a|$

(3) $|a\,b| = |a|\,|b|$

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

(5) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(6) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

ولأى أعداد حقيقية $x , \delta$ حيث $\delta > 0$ فإن الخواص الآتية تكون متحققة:

(1) $|x| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad -\delta < x < \delta$

(2) $|x-c| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad c-\delta < x < c+\delta$

(3) $0 < |x-c| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad c-\delta < x < c \quad \vee \quad c < x < c+\delta$

## ٥ – الفترات Intervals

نفرض أن $a , b \in R$ بحيث أن $a < b$ . الفترة المفتوحة $(a , b)$ هى مجموعة كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين $a , b$

$$(a , b) = \{ x : a < x < b \}$$

a ——— b

الفترة المغلقة $[a , b]$ هى مجموعة كل الأعداد المحصورة بين $b$ , $a$ بالإضافة إلى نقطتى الأطراف $a , b$

$$[a , b] = \{x : a \le x \le b\}$$

وبالمثل توجد سبع أنواع أخرى من الفترات كالآتى :

$$[a , b) = \{x : a \le x < b\}$$

$$(a , b] = \{x : a < x \le b\}$$

$$[a , \infty) = \{x : a \le x < \infty\}$$

$$(a , \infty) = \{x : a < x < \infty\}$$

$$(-\infty , b] = \{x : x \le b\}$$

$$(-\infty , b) = \{x : x < b\}$$

$$(-\infty , \infty) = R$$

ورموز الفترات من السهل أن نتذكرها فنحن نستخدم الأقواس المربعة [ ] للدلالة على أن نقط الأطراف تقع ضمن الفترة بينما نستخدم الأقواس العادية ( ) عندما تكون نقط الأطراف لا تقع ضمن الفترة، وعلى خط الأعداد يتم تمييز وجود أو عدم وجود نقط الأطراف بواسطة دائرة صغيرة ممتلئة ● أو فارغة O على الترتيب. الرمز $\infty$ يقرا لانهاية ووجوده فى الفترة يعنى أن الفترة ممتدة بدون حدود فى الاتجاه الموجب والرمز $-\infty$ يقرا سالب لانهاية ووجوده فى الفترة يعنى أن الفترة ممتدة بدون حدود فى الاتجاه السالب، ورموز اللانهاية $\infty$ , $-\infty$ لا تمثل أعداد حقيقية.

## ٦ – المجموعات المحدودة Bounded Sets

نفرض أن $S$ مجموعة من الأعداد الحقيقية، إذا وجد عدد $M$ بحيث أن $x \le M \quad \forall \quad x \in S$ فإنه يقال أن $M$ هو حد علوى upper bound للمجموعة $S$ وأن المجموعة $S$ محدودة من اعلى bounded above وإذا وجد عدد $m$ بحيث أن $m \le x \quad \forall \quad x \in S$ فإنه يقال أن $m$ هو حد سفلي lower bound للمجموعة $S$ وأن المجموعة $S$ محدودة من اسفل bounded below وإذا كانت المجموعة $S$ محدودة من اعلى ومحدودة من اسفل فإنه يقال أن المجموعة $S$ محدودة bounded وخلاف ذلك تسمى المجموعة $S$ غير محدودة unbounded.

ملاحظات :

١ – إذا كان $M$ حد علوى للمجموعة $S$ فإن أى عدد $K \ge M$ يكون أيضا حد علوى للمجموعة $S$ أى انه يوجد عدد لا نهائي من الحدود العليا للمجموعة.

٢ – إذا كان $m$ حد سفلي للمجموعة $S$ فإن أى عدد $k \le m$ يكون أيضا حد سفلي للمجموعة $S$ أى انه يوجد عدد لا نهائي من الحدود السفلي للمجموعة السفلي.

٣ – المجموعة $S$ تكون محدودة إذا وجد $m , M \in R$ بحيث أن $m \le x \le M \quad \forall \quad x \in S$
وبعبارة أخرى، المجموعة $S$ تكون محدودة إذا وجد $K > 0$ بحيث أن $|x| \le K \quad \forall \quad x \in S$ وفى الجدول الآتى نضع بعض الأمثلة على المجموعة المحدودة :

| نوع المجموعة | المجموعة |
|---|---|
| محدودة | $[2 , 5]$ |
| محدودة | $[-4 , 9)$ |
| محدودة | $(2 , 2^{20}]$ |
| محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى | $[3 , \infty)$ |
| محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى | $(3 , \infty)$ |

| الجموعة | نوع المجموعة |
|---|---|
| $(-\infty , b]$ | محدودة من اعلى وغير محدودة من اسفل |
| $\{1, 2, 3, ...\}$ | محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى |
| $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ | غير محدودة |
| $\{2^{-n} : n \in N\}$ | محدودة |
| $\{2^{-n} : n \in I\}$ | محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى |

## ٧ – كثيرات الحدود Polynomials

المتغير variable هو رمز يستخدم لتمثيل عنصر اعتباطى arbitrary element فى مجموعة معطاة، وعند التعامل مع مجموعات من الأعداد الحقيقية فإنه عادة ما يستخدم الحروف الصغيرة $x , y , z , ...$ لترمز إلى المتغيرات، وتشكيل عمليات جمع (+)، وطرح (−) وضرب (.) للمتغير $x$ تقودنا إلى تكوين ما يسمى بكثيرة الحدود فى المتغير $x$ ويرمز لها $P(x)$ وتعرف كالآتى:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0$$

حيث $(a_n \neq 0)$ $a_0 , a_1 , \ldots , a_n$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات coefficients كثيرة الحدود $P(x)$ والعدد $n \in N$ يسمى درجة كثيرة الحدود $P(x)$ . وفى حالة $n = 1$ فإن كثيرة الحدود $P(x) = a_1 x + a_0$ تسمى كثيرة حدود خطية linear polynomial ، وفى حالة $n = 2$ فإن كثيرة الحدود $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ تسمى كثيرة حدود تربيعية linear polynomial . والعدد $r$ يسمى جذر أو حل للمعادلة

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0 = 0$$

إذا وفقط إذا كان

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ ... \ + a_1 r + a_0 = 0$$

وفى هذه الحالة العدد r يسمى أيضا صفر لكثيرة الحدود $P(x)$.

وفى الجدول الآتى نضع بعض الأمثلة لكثيرات حدود ونوضح درجة كلا منها:

| كثيرة الحدود | درجة كثيرة الحدود |
|---|---|
| $P(x) = 3x - 4$ | من الدرجة الأولى ( كثيرة حدود خطية ) |
| $P(x) = 8$ | من الدرجة صفر |
| $P(x) = 5x^2 - 2x + 3$ | من الدرجة الثانية ( كثيرة حدود تربيعية ) |
| $P(x) = 4x^3 - 9x - 12$ | من الدرجة الثالثة |
| $P(x) = -x^2 + 6x^6 - 8x^5 + 2$ | من الدرجة السادسة |

## ٨ - المتباينات Inequalities

حل معادلة فى المتغير x هو أيجاد مجموعة الأعداد x التى تحقق المعادلة وبالمثل حل متباينة فى المتغير x هو أيجاد مجموعة الأعداد x التى تحقق المتباينة، وطريقة حل المتباينة يشبه طريقة حل المعادلة من حيث انه يمكن إضافة أو طرح نفس العدد من طرفى المتباينة، ويمكن ضرب أو قسمة طرفى المتباينة على عدد موجب تماما كما يحدث مع المعادلات ولكن الاختلاف الوحيد هو انه عند ضرب أو قسمة طرفى المتباينة على عدد سالب فإن المتباينة يتم عكسها فمثلا،بضرب المتباينة $4 < x -$ فى 1- تصبح المتباينة $x < -4$ وبقسمة المتباينة $-2x \le 6$ على 2- تصبح المتباينة $x \ge -3$ .

مثال ١ : أوجد حل المتباينة $x^2 - 4x + 3 < 0$ .

الحل : بتحليل المقدار $x^2 - 4x + 3$ فإن المتباينة تصبح $(x-1)(x-3) < 0$ ، وحل المتباينة يتم بإيجاد قيم x التى تحقق المتباينة، ونلاحظ أن حاصل الضرب $(x-1)(x-3)$ يساوى صفر عند النقط $x = 1$ , $x = 3$ وبوضع هذه النقط على خط الأعداد فإننا نجد أنها تقسم خط الأعداد إلى الفترات الثلاثة

$(-\infty,1)$ , $(1,3)$ , $(3,\infty)$ وعلى كل من هذه الفترات فإن حاصل الضرب $(x-1)(x-3)$ يكون له إشارة ثابتة ولتعيين هذه الإشارة نرسم خط الأعداد ونعين إشارة المقدار $(x-1)$ وإشارة المقدار $(x-3)$ وبالتالى نعين إشارة حاصل الضرب كما هو موضح بالجدول الآتى:

| | $(-\infty,1)$ | $(1,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| إشارة المقدار $(x-1)$ | − | + | + |
| إشارة المقدار $(x-3)$ | − | − | + |
| إشارة $(x-1)(x-3)$ | + | − | + |

وفى الجدول الآتى نضع حل المتباينة $x^2-4x+3>0$ بصورها المختلفة

| المتباينة | مجموعة حل المتباينة |
|---|---|
| $x^2-4x+3>0$ | $(1,3)$ |
| $x^2-4x+3<0$ | $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ |
| $x^2-4x+3\geq 0$ | $[1,3]$ |
| $x^2-4x+3\leq 0$ | $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$ |

مثال ٢:أوجد حل المتباينة $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2>0$ .

الحل : حل المتباينة يتم بإيجاد قيم $x$ التى تحقق أن حاصل الضرب $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2$ يكون موجب. نلاحظ أن حاصل الضرب يساوى صفر عند النقط $x=4$ , $x=1$ , $x=-3$ وبوضع هذه النقط على خط الأعداد فإننا نجد أنها تقسم خط الأعداد إلى الفترات الأربعة $(4,\infty)$ , $(1,4)$ , $(-3,1)$ , $(-\infty,-3)$ وعلى كل من هذه

الفترات فإن حاصل الضرب يكون له إشارة ثابتة وتعيين هــــذه الإشــارة موضــح بالجدول الآتى

| | $(-\infty,-3)$ | $(-3,1)$ | $(1,4)$ | $(4,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| إشارة المقدار $(x+3)^5$ | − | + | + | + |
| إشارة المقدار $(x-1)$ | − | − | + | + |
| إشارة المقدار $(x-4)^2$ | + | + | + | + |
| إشارة $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2$ | + | − | + | + |

أذن حاصل الضرب يكون موجب على الفترات $(4,\infty)$ , $(1,4)$ , $(-\infty,-3)$
إى إن مجموعة حل المتباينة يكون $(-\infty,-3)\cup(1,4)\cup(4,\infty)$ . وفى الجدول الآتــــى نضع حل المتباينة بصورها المختلفة

| المتباينة | مجموعة الحل |
|---|---|
| $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 > 0$ | $(-\infty,-3)\cup(1,4)\cup(4,\infty)$ |
| $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 < 0$ | $(-3,1)$ |
| $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 \geq 0$ | $(-\infty,-3]\cup[1,4]\cup[4,\infty)$ |
| $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 \leq 0$ | $[-3,1]$ |

عند حل متباينات تحتوى على خارج قسمة فإننا نستخدم الحقيقة الآتية :

$$\frac{a}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab > 0 \quad , \quad \frac{a}{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab < 0$$

مثال ٣ : أوجد حل المتباينة $\frac{(x+3)^5(x-1)}{(x-4)^2} > 0$ .

الحل : المتباينة المعطاة لها نفس الحل مثل المتباينة $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 > 0$
وهذه المتباينة تم حلها فى المثال السابق (انظر مثال ٢).

مثال ٤ : أوجد حل المتباينة $\frac{x+2}{1-x} < 1$ .

الحل : إشارة المقدار $(1-x)$ غير معلومة لذلك لا يمكن ضرب المتباينة فى $(1-x)$
ولكن بطرح 1 من المتباينة نحصل على

$$\frac{x+2}{1-x} - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2-(1-x)}{1-x} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x+1}{1-x} < 0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1)(1-x) < 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x+1)(x-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x+\frac{1}{2})(x-1) > 0$$

نلاحظ أن حاصل الضرب $(x-1)(x+\frac{1}{2})$ يساوى صفر عند النقط $x=1$ , $x=-\frac{1}{2}$ وبوضع هذه النقط على خط الأعداد فإننا نجد أنها تقسم خط الأعداد إلى الفترات الثلاث $(1,\infty)$ , $(-\frac{1}{2},1)$ , $(-\infty,-\frac{1}{2})$ وعلى كل من هذه الفترات فإن حاصل الضرب يكون له إشارة ثابتة، وتعيين هذه الإشارة موضح بالجدول الآتى:

| | $(-\infty,-\frac{1}{2})$ | $(-\frac{1}{2},1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| إشارة المقدار $(x+\frac{1}{2})$ | − | + | + |
| إشارة المقدار $(x-1)$ | − | − | + |
| إشارة $(x+\frac{1}{2})(x-1)$ | + | − | + |

أذن مجموعة حل المتباينة يكون $\left(-\infty , -\frac{1}{2}\right) \cup (1 , \infty)$ .

مثال ٥ : أوجد مجموعة حل المتباينة $|x + 2| < 3$

الحل : باستخدام خواص المتباينات

$$|x+2| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x + 2 < 3$$
$$\Leftrightarrow \quad -3 - 2 < x < 3 - 2$$
$$\Leftrightarrow \quad -5 < x < 1$$

أذن مجموعة حل المتباينة هى الفترة المفتوحة $(-5 , 1)$.

# تمارين ملحق ب

١ – أرسم كل من المجموعات الآتية على خط الأعداد

(1) $[5, \infty)$

(2) $(1, 5] \cup (5, 9)$

(3) $[-3, 6) \cap (4, 7)$

(4) $(1, 5] \cup [5, 9]$

(5) $(-\infty, 6)$

(6) $[-1, 4] \cup (2, 8]$

(7) $[-3, \infty) \cap (4, \infty)$

(8) $(-\infty, -1) \cap [-2, \infty)$

٢ – فى كل من المجموعات الآتية عين ما إذا كانت المجموعة المعطاة محدودة من اسفل – محدودة من اعلى – محدودة، وإذا كانت المجموعة المعطاة محدودة من اسفل أعطى حد سفلى للمجموعة، وإذا كانت المجموعة المعطاة محدودة من اعلى أعطى حد علوى للمجموعة، وإذا كانت المجموعة المعطاة محدودة أعطى حد سفلى وحد علوى للمجموعة.

(1) $\{-1, 0, 3, 7, 7.1\}$

(2) $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

(3) $S = \{x \mid x \le 5\}$

(4) $S = \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} \mid n \in N \right\}$

(5) $[-3, 6) \cap (4, 7)$

(6) $(1, 5] \cup (5, 9)$

(7) $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$

(8) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\}$

(9) $S = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in N \right\}$

(10) $S = \{x \mid x \in Q \ , \ x < \sqrt{2}\}$

(11) $[-3, \infty) \cap (4, \infty)$

(12) $(-\infty, -1) \cap [-2, \infty)$

٣ – أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(1) $16x + 64 > 32$

(2) $6x^2 + 2x \leq (x-1)^2$

(3) $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$

(4) $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-6} \geq 0$

(5) $|3x - 5| > 3$

(6) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} < 0$

(7) $\frac{x^2 - 9}{x + 1} > 0$

(8) $|3x + 1| \leq 5$

(9) $\frac{x}{x - 5} > \frac{1}{4}$

(10) $0 < |x - 3| \leq 8$

# المراجع

1- **Breuer , Joseph . : Introduction to the theory of Sets , Prentice – Hall , NJ. 1958.**

2- **Fraenkel , Abraham : Set theory and Logic , Addison – Wesley , 1966 .**

3- **Lipschurtz , Seymour : Theory and Problems of Sets , Schaum's outline Series , McGraw – Hill , New York , 1964.**

4- **Lipschurtz , Seymour : Set Theory and Related Topics , Schaum's outline Series . McGraw – Hill , New York , 1964.**

5- **Spiegel , M . : Set Theory , Schaum's outline Series , McGraw – Hill , New York , 1975.**

6- **i , J . : Elements of Mathematical Logic and Set Theory , Oxford P. 1967 .**

7- **William M . Setek, Jr. : Fundamentals of Mathematics , Prentice – Hall , 1996.**



رقـم الإيـــداع

٢٠٠١ / ٩٩٥٩






7 & 10 شارع السلام أرض اللواء المهندسين

تليفون : 3256098 - 3251043

